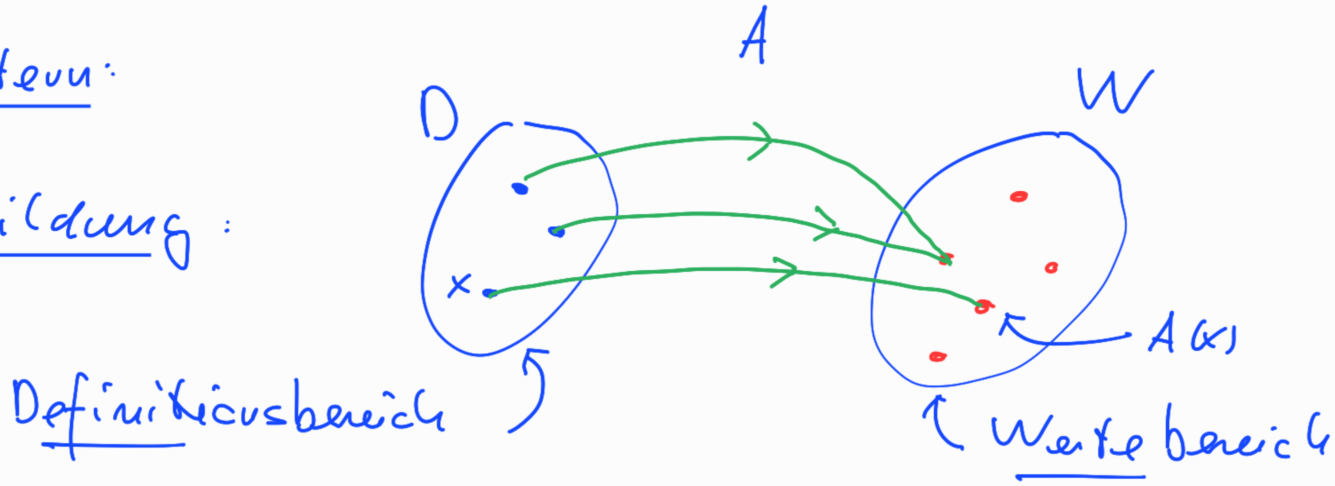
gestern:

## Abbildung:



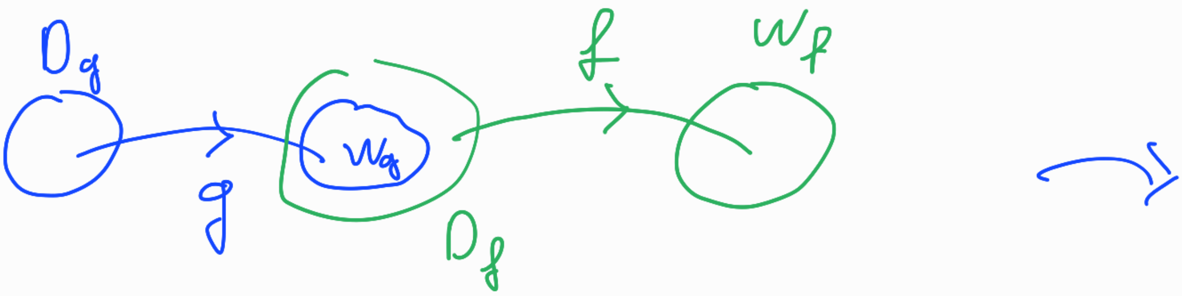

$$A: D \longrightarrow W$$
$$x \longmapsto A(x)$$

reelle Funktion $f$ = Abb. $f: D \to W$

mit $D \subseteq \mathbb{R}$, $W \subseteq \mathbb{R}$

$$f, g: D \to W \subseteq \mathbb{R}: \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x)\, g(x)$$
$$(f/g)(x) = f(x)/g(x)$$

## Verkettung/Komposition:



$$D_g \xrightarrow{g} W_g \subset D_f \xrightarrow{f} W_f$$

$$\longrightarrow \quad \underline{f \circ g} : D_g \longrightarrow W_f$$

$$x \longmapsto (f \circ g)(x) := f(g(x))$$

„$\underline{f \text{ nach } g}$"

- <u>Funktions / Abbildungs-Gleichheit</u>

$$f, g : D \to W$$

$$\boxed{f = g} \quad :\Longleftrightarrow \quad \underline{\text{für } \underline{\text{alle}} \; x \in D \quad f(x) \overset{!}{=} g(x)}$$

- <u>Identische Abb.</u> : $\quad id_D : D \to D$

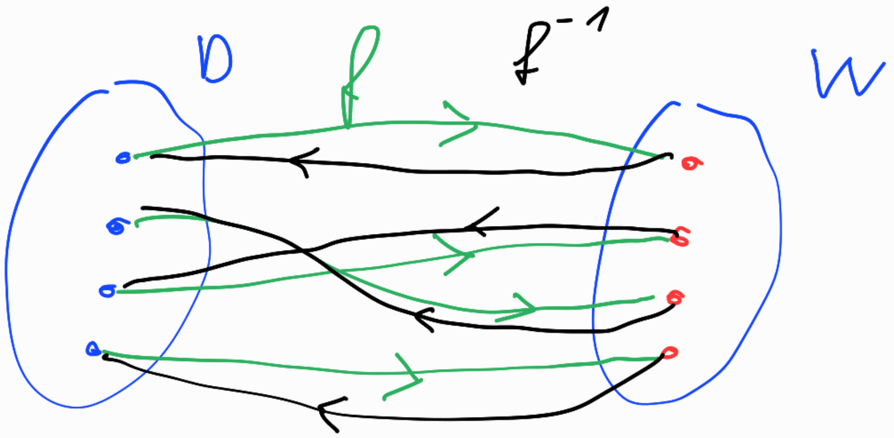
$$x \longmapsto id(x) = x$$

<u>Umkehrfunktion einer umkehrbaren Abb.</u>

- eine Abb. $f : D \to W$ ist

## Umkehrabbildung einer umkehrbaren Abb.

- eine Abb. $f: D \to W$ ist <u>umkehrbar</u> (bijektiv) g.d.w. zu <u>jedem</u> $y \in W$ <u>genau ein</u> $x \in D$ existiert mit $f(x) = y$

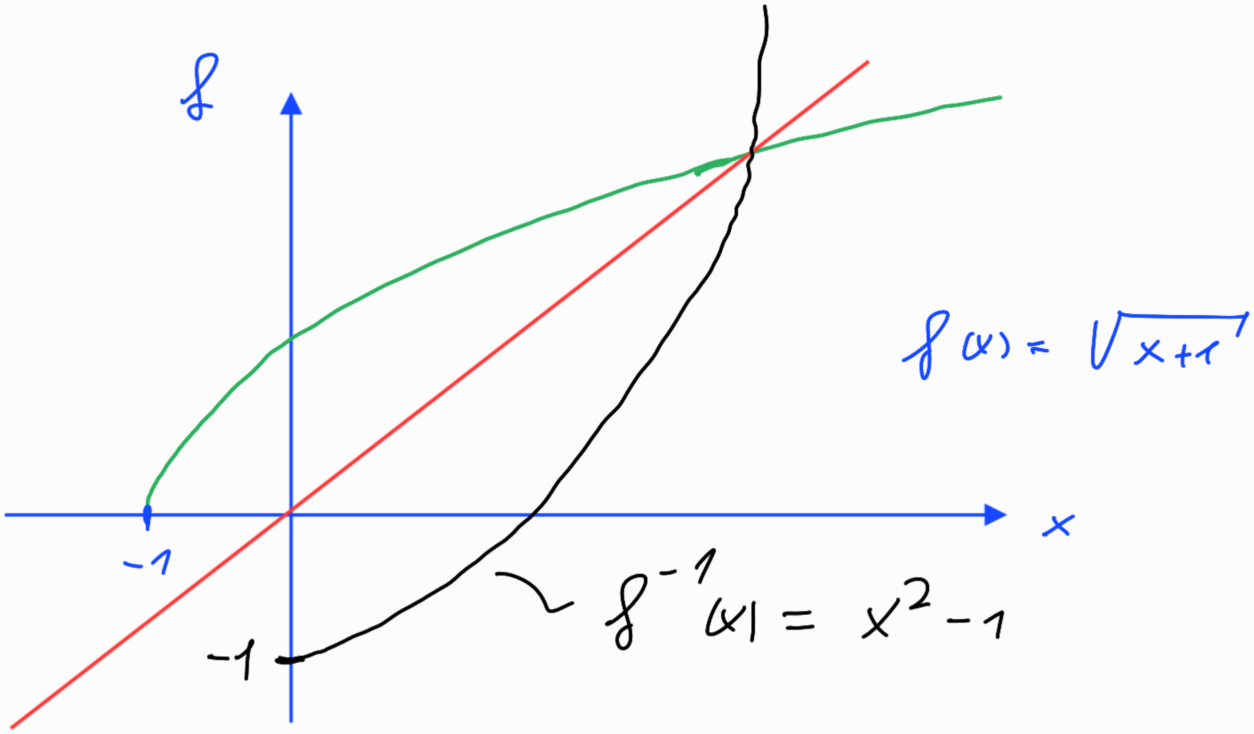



- die Umkehrabbildung $f^{-1}: W \to D$ einer umkehrbaren Abb $f: D \to W$ ist eindeutig bestimmt durch

$$f^{-1} \circ f = id_D \quad .$$

<u>Beispiel</u>: $f: [-1, \infty[ \;\longrightarrow [0, \infty[$

$$x \longmapsto f(x) = \sqrt{x+1}$$




Umkehrfkt.: $\quad f^{-1}(y) = y^2 - 1$

denn $\underbrace{f^{-1} \circ f(x)}_{=\, f^{-1}(\sqrt{x+1})} \stackrel{!}{=} x$

$f^{-1}(\sqrt{x+1}) = x + 1 - 1 = x$ ✓

alternativ

$f(x) = y = \sqrt{x+1}$

↳ löse auf nach $x$: $\quad x = y^2 - 1$

$\rightsquigarrow \quad f^{-1}(y) = y^2 - 1$

es gilt: • $(f^{-1})^{-1} = f$

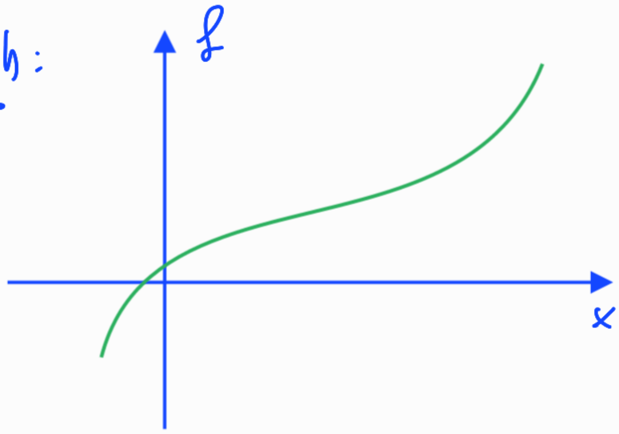
• $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

$\ulcorner$

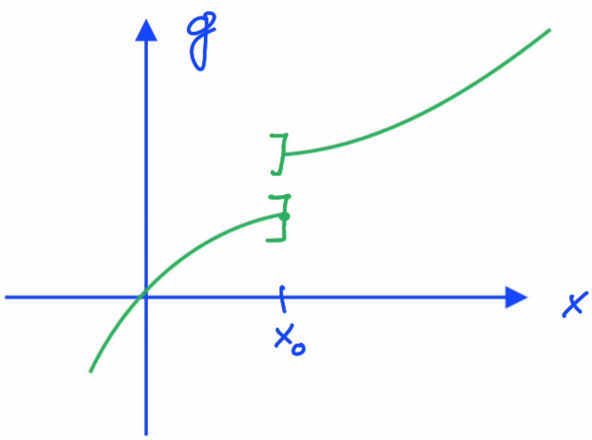
$$\underbrace{(g^{-1} \circ f^{-1}) \circ \underbrace{(f \circ g)(x)}_{f(g(x))}}_{g^{-1}(\underbrace{f^{-1}(f(g(x)))}_{g(x)})} \overset{!}{=} x \quad \checkmark$$

$$g^{-1} g(x) = x \qquad \lrcorner$$

## Stetigkeit, stetige Funktion

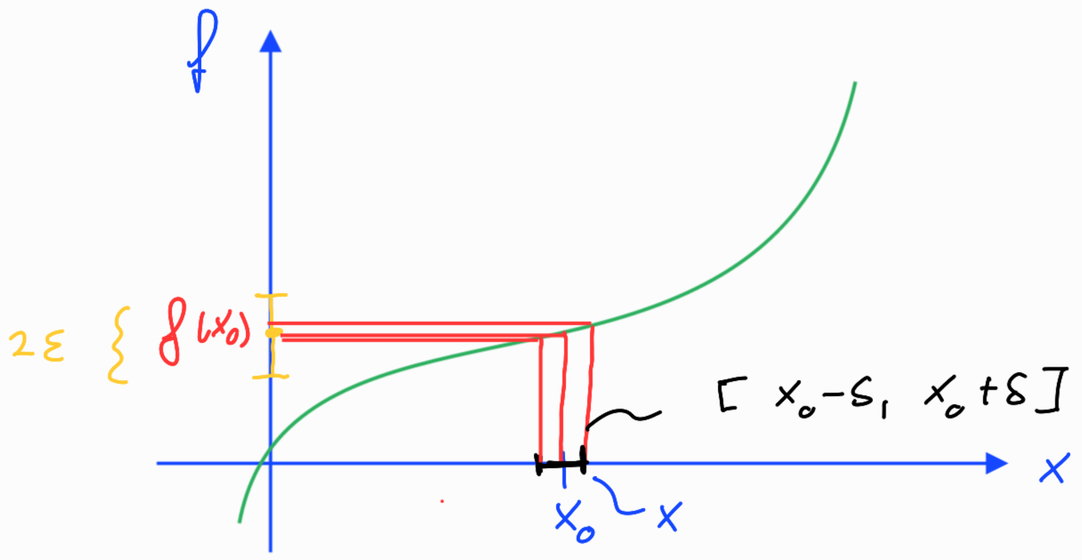



„stetig"




$g$ unstetig in $x_0$

anschaulich:




$f$ ist stetig in $x_0$ $:\Longleftrightarrow$ " $f(x)$ strebt gegen $f(x_0)$ für $x$ gegen $x_0$ "

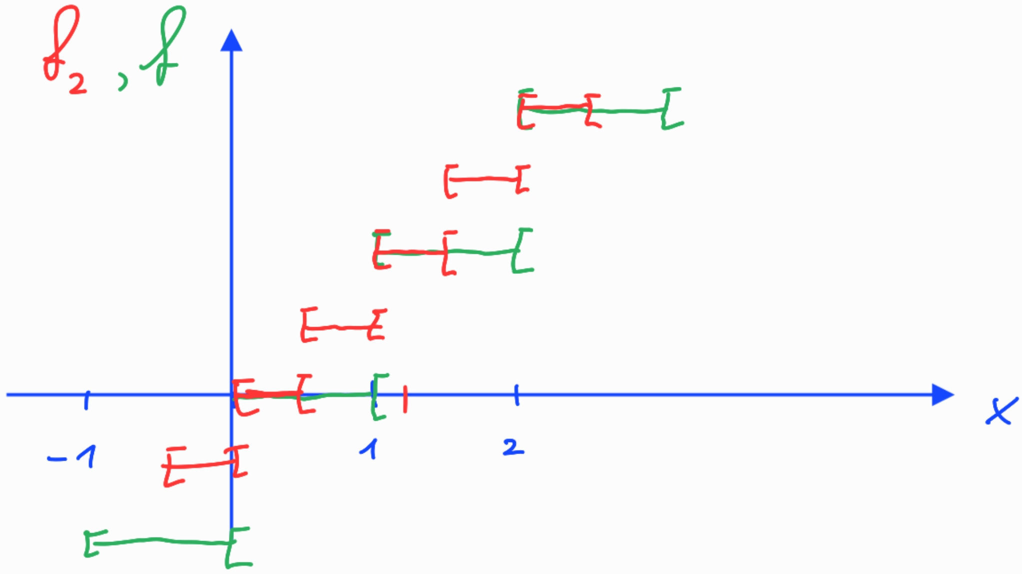
genauer:

- $f$ ist stetig in $x_0$ $:\Longleftrightarrow$ für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ gilt $f(x) \in [f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon]$

- $f: D \to \mathbb{R}$ stetige Fkt. $:\Longleftrightarrow$ für alle $x_0 \in D$: $f$ stetig in $x_0$

# Beispiele

1) $f(x) = \lfloor x \rfloor :=$ größte ganze Zahl $\leq x$




2) $f_2(x) := \frac{1}{2} \lfloor 2x \rfloor$

3) $f_n(x) := \frac{1}{n} \lfloor nx \rfloor$

4) $\lim_{n \to \infty} f_n(x) \stackrel{!}{=} x$ stetig!

aber $f_n(x)$ unstetig für $n < \infty$!

⋮

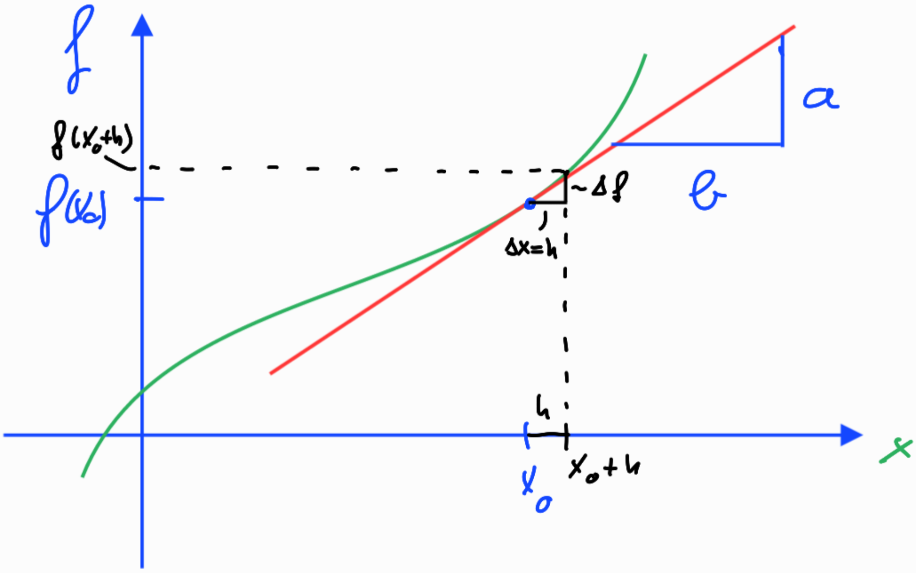
gesucht: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so, dass $f$

unstetig in $x_0$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ !

$$f(x) = \begin{cases} 1 : & x \in \mathbb{Q} \\ 0 : & x \in \mathbb{R} / \mathbb{Q} \end{cases} \quad ?$$

## Ableitung einer Funktion

grob:




Ableitung von $f$ in $x_0$ := Steigung der Tangente in $(x_0, f(x_0))$

$$f'(x_0) \overset{!}{=} \frac{a}{b}$$

genauer:

- Ableitung von $f$ in $x_0$

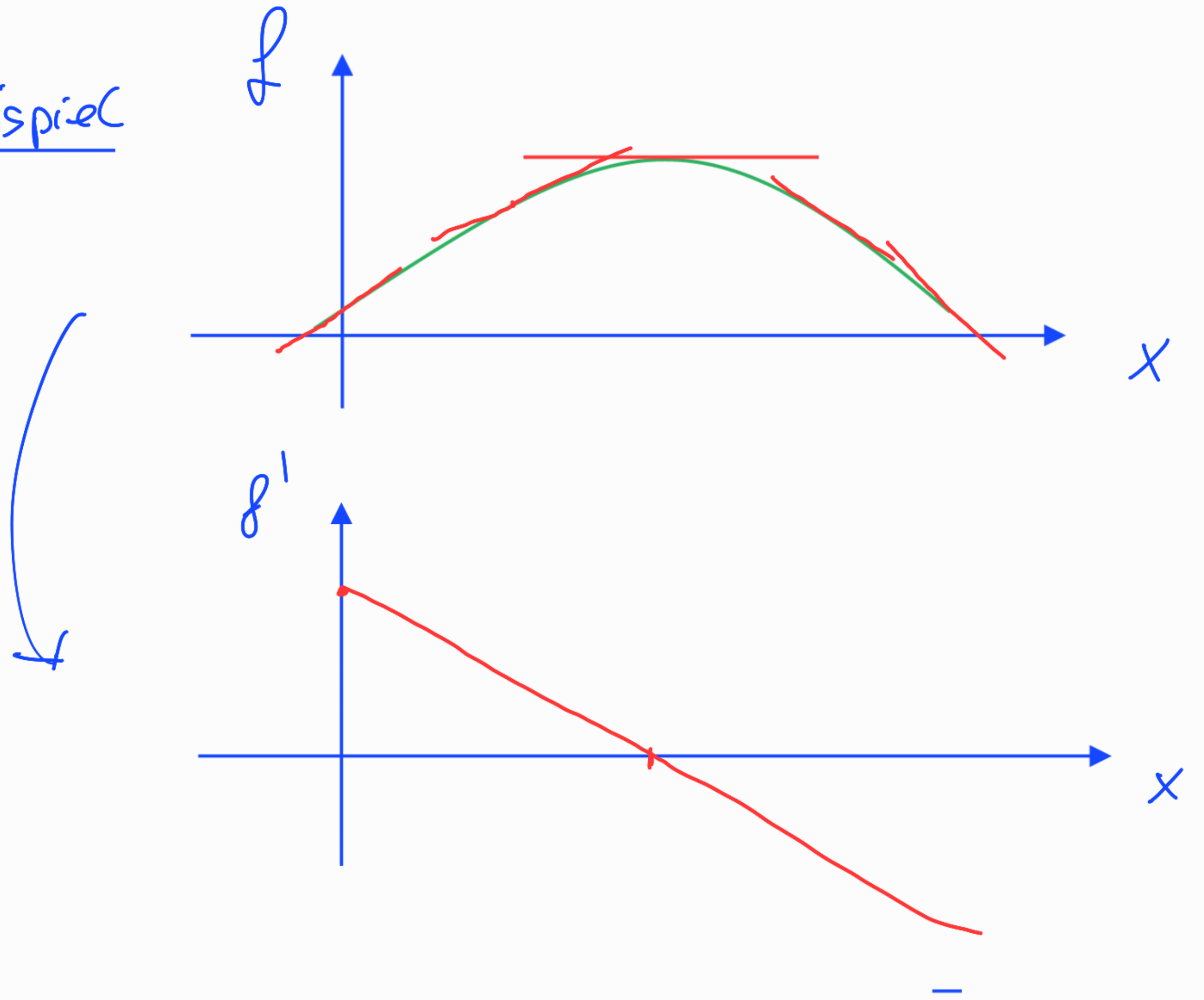
$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\text{Differenzenquotient}}}$$

- Ableitung von $f: D \to W$

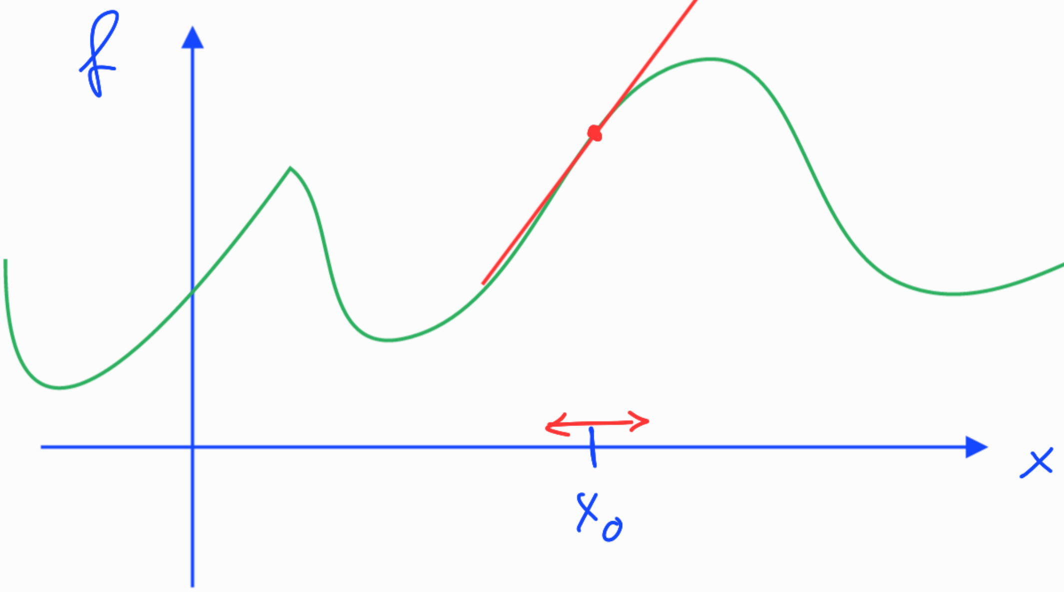
Fkt $f': D \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f'(x)$

<u>Beispiel</u>



## Lineare Näherung



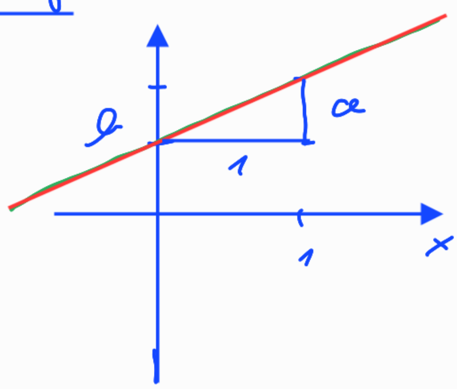

h hinreichend klein

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$\boxed{f(x_0+h) \simeq f(x_0) + f'(x_0)\cdot h}$$

## Elementare Berechnung der Ableitung

1) $f(x) = ax + b$




$$f'(x) = \frac{a}{1} = a \quad ✓$$

$$= \frac{1}{h}\left(f(x+h) - f(x)\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\overbrace{a(x+h) + \cancel{b}}^{=} - ax - \cancel{b}\right) = \frac{a\cdot h}{h} = a$$

2) $g(x) = x^2$

$g'(x) = 2x$ ! $(h \to 0)$

warum?

$\Rightarrow$ $\underline{g'(x_0)} = \frac{1}{h}\left( g(x_0+h) - g(x_0) \right)$

$= \frac{1}{h}\left( (x_0+h)^2 - x_0^2 \right)$

$= \frac{1}{h}\left( \cancel{x_0^2} + \underline{2x_0 h} + h^2 - \cancel{x_0^2} \right)$

$= \underline{2x_0} + \underline{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \underline{2x_0}$

$\rightsquigarrow$ $g'(x) = 2x$

$(x^2)' = 2x$