gestern:

- $(x^n)' = n x^{n-1}$
- $(\sin x)' = \cos x$ $\qquad \ulcorner \sin' = \cos$
- $(\cos x)' = -\sin x$ $\qquad \cos' = -\sin \lrcorner$
- $\exp(x) := e^x$

$\to \exp' = \exp$, d.h. $(e^x)' = e^x$

- Euler-Zahl $e = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828\ldots$

$$\ulcorner = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots$$

$$= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \lrcorner$$

- "n Fakultät" $= n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)\, n$

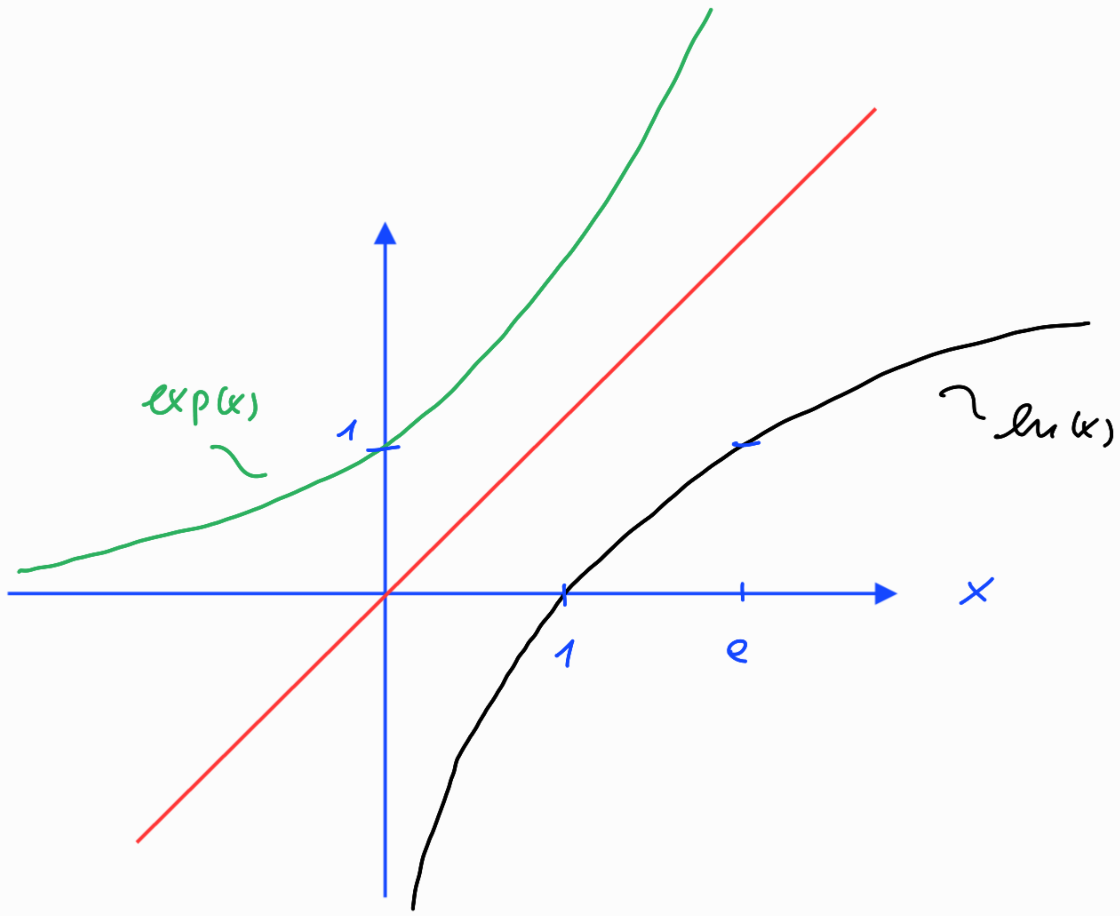
heute:

Logarithmus, Taylor-Entwicklung, höhere Ableitungen, partielle Ableitung.

(Natürliche) Logarithmus ln

:= Umkehrfkt. der Exponentialfkt. exp

$$\ln = \exp^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \ln(x)$$



$$\boxed{\ln e^x = x = e^{\ln x}}$$

$(\ln x)' = ?$ $\rightsquigarrow$

$$e^{\ln x} \overset{!}{=} x \qquad \Big| \; \frac{d}{dx}$$

$$\underbrace{e^{\ln x}}_{= x} \cdot (\ln x)' = 1$$

$$\rightsquigarrow \quad \boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

<u>Rechenregeln:</u>

$$e^{r+s} = e^r e^s \quad (i) \qquad \longleftrightarrow \qquad \ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$(e^r)^\lambda = e^{\lambda r} \quad (ii) \qquad\qquad \ln(a^\lambda) = \lambda \ln a$$

$$\Big\lceil \quad a = e^{\ln a}, \quad b = e^{\ln b}$$

$$\ln(ab) = \ln(e^{\ln a} \cdot e^{\ln b}) \overset{(i)}{=}$$

$$= \ln(e^{\ln a + \ln b}) = \ln a + \ln b$$

$$\ln(a^\lambda) = \ln((e^{\ln a})^\lambda) \overset{(ii)}{=} \ln(e^{\lambda \ln a})$$

$$= \underline{\lambda \ln a} \qquad \Big\rfloor$$

Anwendung:

$$n \in \mathbb{N} \qquad (x^n)' = n\, x^{n-1}$$

$$\nu \in \mathbb{R} \qquad (x^\nu)' = \nu\, x^{\nu-1} \qquad (x \in \mathbb{R}_+)$$

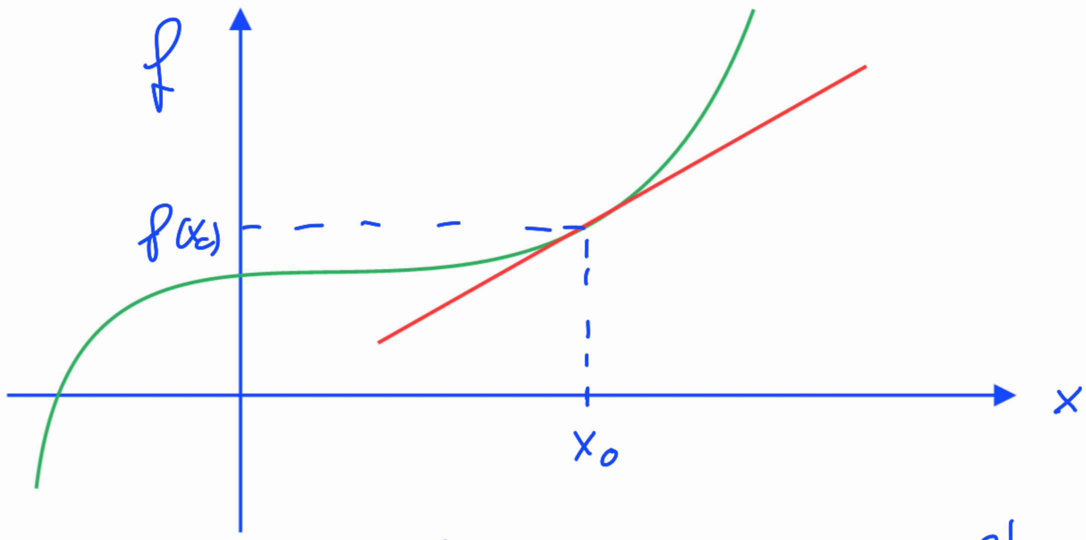
$$x^\nu = e^{\ln(x^\nu)} = e^{\nu \ln x}$$

$$(x^\nu)' = \left(e^{\nu \ln x}\right)' = e^{\nu \ln x} \cdot (\nu \ln x)'$$

$$= \underbrace{e^{\nu \ln x}}_{x^\nu}\, \nu\, \frac{1}{x} = \nu\, x^{\nu-1} .$$

Taylor-Entwicklung

bisher: lineare Näherung einer Fkt. f in x_0:

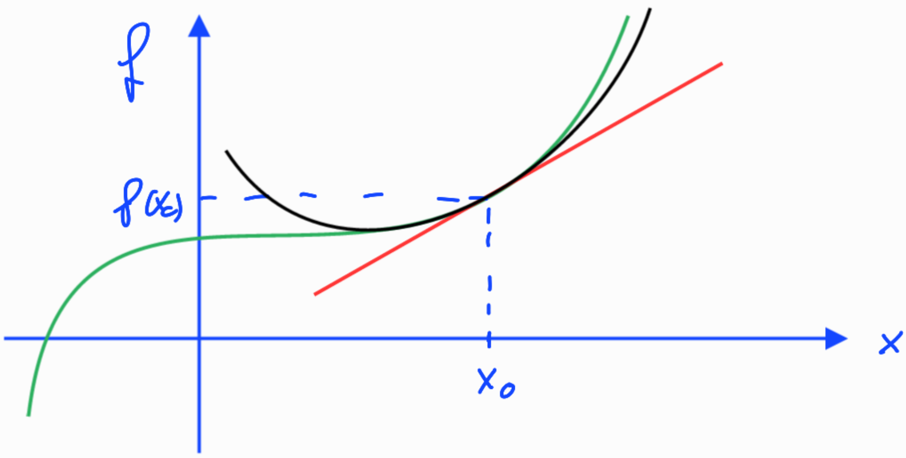


$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x$$

genauer: Näherung von f in x_0 durch

Polynom in Δx $(= x - x_0)$

n-ten Grades:



$a_0 = f(x_0)$

$a_1 = f'(x_0)$

$$f(x_0 + \Delta x) \simeq \tilde{f}_n(\Delta x) = a_0 + a_1 \Delta x + a_2 \Delta x^2 + \dots + a_n \Delta x^n$$

Wahl der Koeffizienten $a_0, \dots, a_n = ??$

höhere Ableitung:

$$\begin{array}{lll} \text{Funktion} & f & = f^{(0)} \\ \text{1. Ableitung} & f' & = f^{(1)} \\ \text{2. Ableitung} & f'' := (f')' & = f^{(2)} \\ \text{3. " "} & f''' = (f'')' & = f^{(3)} \\ \text{4. " "} & f^{(4)} = (f^{(3)})' & \end{array}$$

Abl. Abl. Abl. Abl.

kürzer:

$$f^{(n+1)} := \left(f^{(n)}\right)'$$

$$f^{(0)} := f$$

<u>Beispiel</u>: $f(x) = x^4$

$$f^{(0)}(x) = x^4$$

$$f^{(1)}(x) = 4x^3$$

$$f^{(2)}(x) = 4 \cdot 3\, x^2$$

$$f^{(3)}(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x$$

$$f^{(4)}(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$\ell \geq 5$

$$f^{(\ell)}(x) = 0$$

allg.:

$$(x^m)^{(\ell)} = \begin{cases} m(m-1)\cdots(m-\ell+1)\, x^{m-\ell} & : \ell < m \\ m! & : \ell = m \\ 0 & : \ell > m \end{cases}$$

Taylor-Entwicklung:

Idee: verlange Übereinstimmung der höheren Ableitungen in x_0 von f und $\tilde{f}_n$ bis einschl. n-ten Ordnung!

für $x_0 = 0$:

- $f(x)$ $\quad (\Delta x = x)$
- $\tilde{f}_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

mit $a_1, \dots, a_n$ best. durch

$$\boxed{f^{(\ell)}(0) \overset{!}{=} \tilde{f}_n^{(\ell)}(0)} \qquad (*)$$

$$\tilde{f}_n^{(\ell)}(0) = \left(\sum_{m=0}^{n} a_m x^m \right)^{(\ell)} \Bigg|_{x=0}$$

$$= \sum_{m=0}^{n} a_m (x^m)^{(\ell)} \Big|_{x=0} = a_\ell\, \ell!$$

(*)

$$\rightarrow \quad f^{(l)}(0) \overset{!}{=} a_l \, l!$$

$$\rightarrow \quad \boxed{a_l = \frac{1}{l!} f^{(l)}(0)}$$

Taylor-Entwicklung n-ter Ordnung von f in $x_0 = 0$:

$$\tilde{f}_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) \cdot x^m$$

$$\simeq f(x)$$

<u>Bsp</u>: $f(x) = \ln(1+x) \longrightarrow 0$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \xrightarrow{x=0} 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \longrightarrow -1$$

$$f'''(x) = +2 \frac{1}{(1+x)^3} \longrightarrow +1 \cdot 2$$

$$f^{(4)}(x) = -2 \cdot 3 \frac{1}{(1+x)^4} \longrightarrow -1 \cdot 2 \cdot 3$$

$\vdots$

$$\rightsquigarrow \quad \ln(1+x) \simeq \tilde{f}_n(x)$$

$$= \underset{\underset{0}{\parallel}}{f(0)} + \underset{\underset{1}{\parallel}}{f'(0)}\, x + \frac{\overset{\overset{-1}{\parallel}}{f''(0)}\, x^2}{2!} + \frac{\overset{1\cdot 2}{f'''(0)}}{3!}\, x^3 + \dots$$

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = ?$$

$$= -\Big\{ \underbrace{(-1) - \frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^5}{5} - \dots}_{\text{"}\ln(1-1) \,=\, \ln(0) \,=\, -\infty\text{"}} \Big\}$$

divergent!

um $x = 0$

2. Beispiel: $f(x) = \exp(x) = x$

$$f^{(0)}(x) = e^{x} \xrightarrow{x=0} 1$$

$$f'(x) = e^{x} \longrightarrow 1$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = e^{x} \longrightarrow 1$$

$$\rightsquigarrow \quad \exp(x) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{f^{(n)}(0)}_{\overset{!}{=} 1} x^{n}$$

$$\boxed{\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n}} \quad ,$$

Taylor-Entwicklung ($n = \infty$)-Ordnung

$\equiv$ Potenzreihe für $\exp(x) = e^{x}$

$$e^{x} = \exp(x) = 1 + x + \frac{1}{2} x^{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} x^{3} + \ldots$$

<u>Euler-Zahl</u>: $e = e^{1} = \exp(1)$

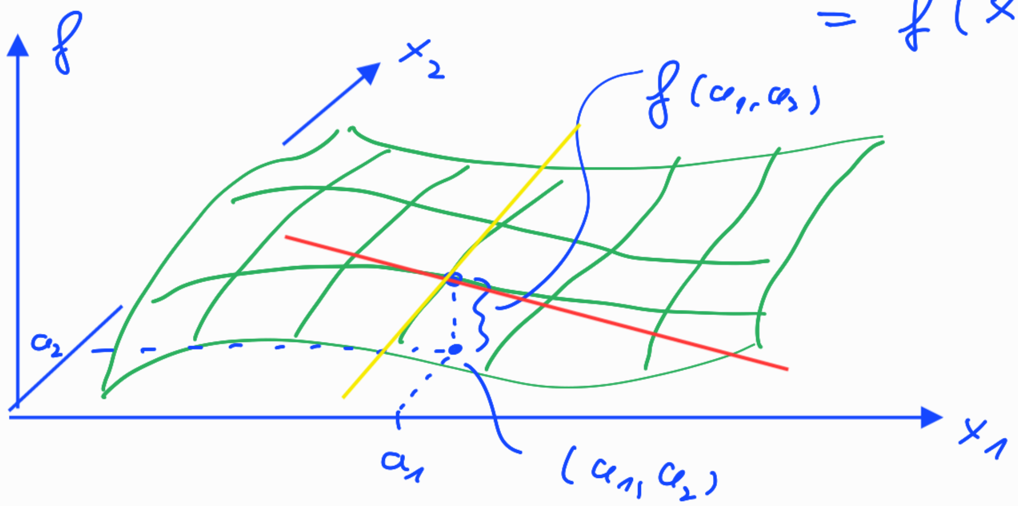
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \, .$$

Partielle Ableitung und Gradient einer Funktion in n Variablen

$\hookrightarrow \quad f : D \longrightarrow \mathbb{R} \qquad D \subset \mathbb{R}^n$

$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\vec{x})$

$n = 2$



"Steigung von f in Richtung $\underline{\underline{x_1}}$"

= partielle Ableitung von f nach x_1:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) := \Big(f(x, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fest}}}{x_2}) \Big)'$$

d. h.
$$\frac{\partial f}{\partial x_e}(\vec{x}) = \Big(f(x_1, \dots, x_{e-1}, x, x_{e+1}, \dots) \Big)'$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_e}(\vec{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \Big(f(\vec{x} + h\, \vec{e}_e) - f(\vec{x}) \Big)}$$

<u>Bsp.</u>: $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2 x_1 x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1^2$$