

Mathematische Methoden – Blatt 1

Wintersemester 2024/25

Webpage: http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmeth_24.html/
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5966594.html

Abgabe: Dienstag, den 22.10.2024, 23:59 Uhr

0. Zur Diskussion

0 Punkte

- a) Was ist ein Vektor?
- b) Was versteht man unter Vektoraddition und Skalarmultiplikation?
- c) Was ist eine Basis eines Vektorraums?
- d) Was ist die Dimension eines Vektorraums?

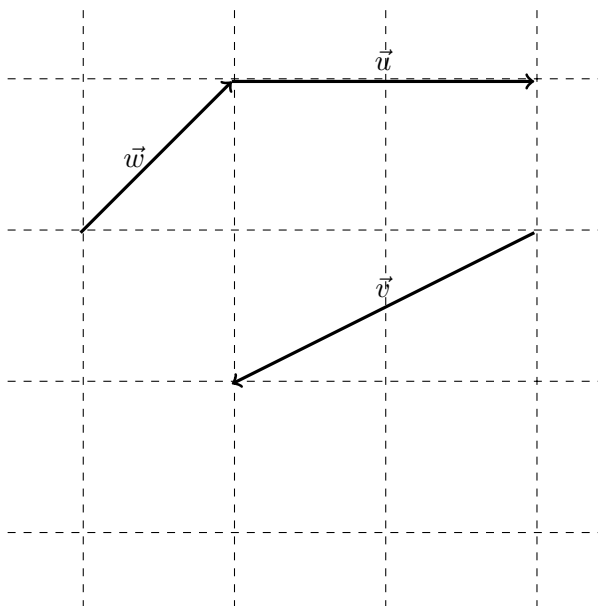
1. Vektoraddition

5 Punkte

Die in der nebenstehenden Abbildung gezeigten Pfeile $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ symbolisieren Vektoren, die hier als Parallelverschiebungen zu interpretieren sind. Skizzieren Sie folgende Ausdrücke von $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$:

$$\vec{u} + \vec{v}, \quad \vec{u} + \vec{w}, \quad \vec{w} - \vec{u},$$

$$\vec{r} = \vec{w} + 2(\vec{u} + \vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}).$$



2. Basisvektoren

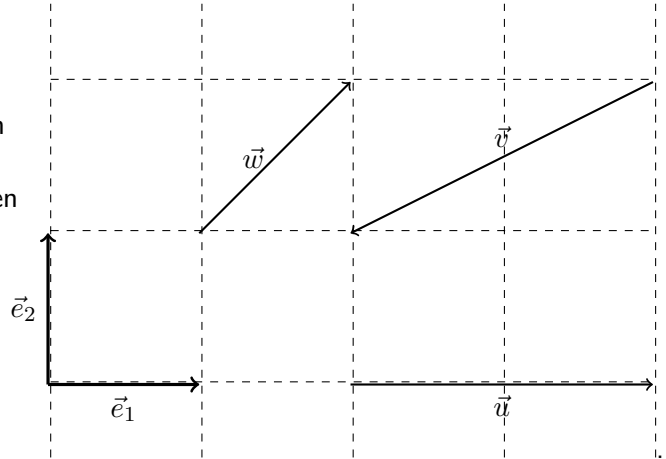
3+2=5 Punkte

$\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ seien die in der nebenstehenden Abbildung skizzierten Vektoren.

- a) Schreiben Sie die ebenfalls dargestellten Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ als Linearkombinationen der Vektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$.
Wie lauten demnach jeweils die Komponenten der Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ bzgl. der Basis $\mathcal{B} := (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$?

- b) Skizzieren Sie folgende Vektoren:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad \vec{z} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2.$$



3. Komponenten

4+4 Punkte

$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sei eine Basis eines Vektorraums V . Eine weitere Basis von V sei $\mathcal{C} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ mit Vektoren

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \\ \vec{f}_2 &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \\ \vec{f}_3 &= \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Ferner seien Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ gegeben durch

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

- a) Stellen Sie $\vec{u} + \vec{v}$ und $\vec{u} - \vec{v}$ in Komponenten bzgl. Basis $\mathcal{B}$ dar.
b) Sellen Sie $\vec{w}$ in Komponenten bzgl. Basis $\mathcal{C}$ dar.

4. Funktionen als Vektoren

1+2+3=6 Punkte

P_3 sei der Vektorraum der ganzrationalen Funktionen maximal 3. Grades. Eine Basis des Vektorraums sei $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ mit Funktionen $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = x^3.$$

- a) Was ist die Dimension von P_3 ?
b) Ist $(\tilde{f}_0, f_1, f_2, f_3)$ mit $\tilde{f}_0(x) = x(x-1)$ ebenfalls eine Basis von P_3 ?
c) Die Funktionen $g, h \in P_3$ seien gegeben durch

$$g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad h = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad l = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}},$$

Skizzieren Sie die Graphen von g und $g + h - l$.