
Mathematische Methoden – Blatt 10

Wintersemester 2024/25

Webpage: http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmeth_24.html/
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5966594.html

Abgabe: Dienstag, den 07.01.2025, 23:59 Uhr

45. Zur Diskussion

0 Punkte

- a) Was ist ein Potenzial eines Vektorfelds?
- b) Was ist ein konservatives Vektorfeld?
- c) Wie lässt sich ein Wegintegral über ein konservatives Vektorfeld anhand eines Potenzials des Vektorfelds bestimmen?
- d) Was ist eine Parametrisierung eines Wegs?
- e) Was genau ist mit $\int_c \vec{A} d\vec{l}$ gemeint?

46. Füllstand

2+3+4=9 Punkte

Aus einem zylindrischen Behälter läuft Öl hoher Viskosität aus einem am Behälterboden befindlichen Auslauf. Zudem fließt Öl in den Behälter mit einer Stromstärke, die zeitlich mit Frequenz Ω und Amplitude I_1 um einen Mittelwert $I_0 > I_1$ oszilliert. Demzufolge genügt die Füllhöhe $y(t)$ des Öls im Behälter der DGL

$$\dot{y} = -ay + b_0 + b_1 \cos(\Omega t), \quad b_0 > b_1, \quad (1)$$

wobei a, b_0, b_1 positive reelle Parameter sind (vgl. Vorlesung).

Zur Bestimmung einer speziellen Lösung der linearen inhomogenen DGL betrachten wir zunächst die DGL

$$\dot{z} = -az + b_0 + b_1 e^{i\Omega t} \quad (2)$$

für eine komplexe Größe $z(t)$.

- a) Zeigen Sie, dass der Realteil einer Lösung $z(t)$ der DGL (2) eine Lösung der ursprünglichen DGL (1) ist.
- b) Zur Bestimmung einer speziellen Lösung der DGL (2) verwenden wir den Ansatz

$$z_s(t) = \frac{b_0}{a} + q e^{i\Omega t}, \quad (3)$$

wobei q ein geeignet zu wählender komplexer Parameter ist. Zeigen Sie, dass mit

$$q = \frac{b_1}{a + i\Omega}$$

$z_s(t)$ eine Lösung ist.

- c) Bringen Sie die spezielle Lösung $y_s(t) = \operatorname{Re} z_s(t)$ in die Form

$$y_s(t) = u + A \cos(\Omega t - \varphi).$$

Diskutieren Sie Amplitude A und Phasenverschiebung φ als Funktion der Frequenz Ω .

47. Kreisumfang

5 Punkte

Parametrisieren Sie einen Kreisweg c von Radius R und berechnen Sie dann die Länge des Wegs c mittels eines geeigneten Wegintegrals.

48. Arbeit

8 Punkte

Ein Teilchen durchläuft einen Kreisweg c im Uhrzeigersinn genau einmal und kommt damit an seinen Ausgangspunkt zurück. Der Kreisweg c mit Radius R und Mittelpunkt o liegt in der x_1x_2 -Ebene. Auf das Teilchen wirkt das (nicht-konservative) Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = k \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Skizzieren Sie das Kraftfeld in der x_1x_2 -Ebene.
- b) Welche Arbeit $A = - \int_c \vec{F} d\vec{l}$ wird benötigt, um das Teilchen einmal längs c im Kreis zu bewegen?

49. Potenzial

4+4=8 Punkte

- a) Geben Sie für folgende konservative Vektorfelder jeweils ein Potenzial an:

$$\vec{A}_1(\vec{r}) = r^3 \hat{r}, \quad \vec{A}_2(\vec{r}) = -\frac{\hat{r}}{r}, \quad \vec{A}_3(\vec{r}) = -\vec{e}_2, \quad \vec{A}_4(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \\ 3x_3 \end{pmatrix}.$$

- b) Bestimmen Sie für die Vektorfelder aus a) jeweils das Wegintegral $\int_c \vec{A}_i d\vec{l}$ längs eines Wegs c , der von einem Punkt P_1 mit Ortsvektor $\vec{r}_1 = \vec{e}_1$ geradlinig nach einem Punkt P_2 mit Ortsvektor $\vec{r}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ verläuft.