

---

## Mathematische Methoden – Blatt 11

---

Wintersemester 2024/25

Webpage: [http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmeth\\_24.html/](http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmeth_24.html/)  
[https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto\\_uk\\_crs\\_5966594.html](https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5966594.html)

Abgabe: Dienstag, den 14.01.2025, 23:59 Uhr

### 50. Zur Diskussion

0 Punkte

- a) Was versteht man unter der Parametrisierung einer Kurve, eines Flächenstücks oder eines Volumengebiets?
- b) Geben Sie Parametrisierungen für folgende Objekte im dreidimensionalen Raum an:
- Strecke zwischen zwei Punkten  $A$  und  $B$  mit Ortsvektoren  $\vec{r}_A$  und  $\vec{r}_B$ ,
  - Parallelogramm mit Kantenvektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ , ein Eckpunkt des Parallelogramms soll im Ursprung liegen,
  - Spat mit Kantenvektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$ , ein Eckpunkt des Spats soll im Ursprung liegen,
  - Kreisfläche mit Radius  $R$ , Mittelpunkt im Ursprung, senkrecht zu  $\vec{e}_3$ .

### 51. Flächeninhalt

8 Punkte

Ein Flächenstück im Raum sei parametrisiert durch

$$S : [0, R] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(\rho, \varphi) \mapsto \vec{S}(\rho, \varphi) = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ H\rho/R \end{pmatrix},$$

wobei  $R$  und  $H$  positive Konstanten sind. Skizzieren Sie das Flächenstück und berechnen Sie den Flächeninhalt.

### 52. Flächenintegral

6 Punkte

Das Flächenstück  $S$  sei das Rechteck mit den Eckpunkten  $(0, 0, 0)$ ,  $(2, 0, 0)$ ,  $(2, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ . Ein Vektorfeld  $\vec{A}$  sei gegeben durch

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \cos(x_1 + x_2)^2 \\ \sin(x_1 + x_2)^3 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Flächenintegral  $\int_S \vec{A} d\vec{f}$ .

### 53. Volumeninhalt

8 Punkte

Ein Volumengebiet  $G$  im Raum sei parametrisiert durch

$$G : [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(\rho, \varphi, u) \mapsto \vec{G}(\rho, \varphi, u) = \begin{pmatrix} u\rho \cos \varphi \\ u\rho \sin \varphi \\ H\rho/R \end{pmatrix},$$

wobei  $R$  und  $H$  positive Konstanten sind. Skizzieren Sie das Volumengebiet und berechnen Sie den Volumeninhalt.

### 54. Symmetrie

3+2=5 Punkte

Volumenintegrationen können bei vorliegenden Symmetrien erheblich vereinfacht werden. Hier betrachten wir das Integral einer kugelsymmetrischen Funktion über eine Kugel. In Aufgabenteil **a)** leiten wir eine allgemeine Beziehung ab, mit der wir in Aufgabenteil **b)** beispielhaft die elektrische Ladungsdichte eines Wasserstoffatoms untersuchen.

a) Eine kugelsymmetrische Funktion  $f$  sei in sphärischen Koordinaten  $r, \vartheta, \varphi$  gegeben durch

$$f : (r, \vartheta, \varphi) \mapsto f(r).$$

$K_R$  sei eine Kugel mit Radius  $R$  und Mittelpunkt  $o$ . Zeigen Sie, dass

$$\int_{K_R} f \, dV = \int_0^R f(r) 4\pi r^2 \, dr.$$

b) Ein Wasserstoffatom besteht aus einer ausgedehnten, negativ geladenen Atomhülle um einen nahezu punktförmigen, positiv geladenen Kern. Im Grundzustand ist die elektrische Ladungsdichte  $\rho_e$  der Hülle kugelsymmetrisch um den Kern angeordnet. Befindet sich der Kern im Ursprung  $o$ , so lautet die Dichte

$$\rho_e(r) = \frac{-e}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0}.$$

Hierbei ist  $a_0$  der Bohrsche Atomradius und  $e$  die elektrische Elementarladung.  $Q_R$  sei die elektrische Ladung der Atomhülle, die in einer Kugel von Radius  $R$  um den Atomkern enthalten ist. D.h.

$$Q_R = \int_{K_R} \rho_e \, dV.$$

Bestimmen Sie  $Q_R$  im Limes  $R \rightarrow \infty$ .

Hinweis:  $\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = 2$ .