
Mathematische Methoden – Blatt 12

Wintersemester 2024/25

Webpage: http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmeth_24.html/
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5966594.html

Abgabe: Dienstag, den 21.01.2025, 23:59 Uhr

55. Zur Diskussion

0 Punkte

- a) Wie lauten die Integralsätze von Gauß und Stokes?
b) Das Gaußsche Gesetz der Elektrostatik besagt

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho .$$

Zeigen Sie damit, dass der elektrische Fluss $\int_{\partial V} \vec{E} d\vec{f}$ durch die Oberfläche ∂V eines Volumengebiets V gleich der in V enthaltenen Ladung $Q_V = \int_V \rho dV$ ist (bis auf einen Faktor ε_0):

$$\int_{\partial V} \vec{E} d\vec{f} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_V .$$

56. Divergenz

10 Punkte

Skizzieren Sie die folgenden Vektorfelder in der x_1x_2 -Ebene und bestimmen Sie jeweils deren Divergenz und Rotation:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \hat{r}, \quad \vec{B}(\vec{r}) = \vec{e}_3 \times \vec{r}, \quad \vec{C}(\vec{r}) = \langle \vec{e}_1, \vec{r} \rangle \vec{e}_2 .$$

57. Satz von Gauß

5 Punkte

Das Volumengebiet W sei der Einheitswürfel $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ im \mathbb{R}^3 . Ein Vektorfeld \vec{A} ist gegeben durch $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{3} \vec{r}$. Berechnen Sie (ggf. mit Hilfe des Satz von Gauß):

$$\operatorname{div} \vec{A}, \quad \int_W \operatorname{div} \vec{A} dV, \quad \int_{\partial W} \vec{A} d\vec{f} .$$

58. Satz von Stokes

5 Punkte

Das Flächenstück K sei eine Kreisfläche senkrecht zu \vec{e}_3 , Radius 1 und Mittelpunkt bei $\vec{r}_0 = (1, 1, 1)$. Ein Vektorfeld \vec{B} ist gegeben durch $\vec{B}(\vec{r}) = x_2 \vec{e}_1$. Berechnen Sie (ggf. mit Hilfe des Satz von Stokes):

$$\operatorname{rot} \vec{B}, \quad \int_K \operatorname{rot} \vec{B} d\vec{f}, \quad \int_{\partial K} \operatorname{rot} \vec{B} d\vec{l} .$$