Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse

Mathematische Methoden – Blatt 13

Wintersemester 2024/25

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/mathmeth_24.html/*
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5966594.html

Abgabe: Dienstag, den 28.01.2025, 23:59 Uhr

59. Zur Diskussion *0 Punkte*

a) Was ist eine lineare Abbildung? Was versteht man unter einer Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung?

b) Was ist ein Eigenvektor und ein Eigenwert einer linearen Abbildung?

c) Eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ besitzt bzgl. der Standardbasis B die Abbildungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wie lauten die Eigenvektoren und Eigenwerte der Abbildung A?

60. Lineare Abbildungen *3+4+3=10 Punkte*

Wir betrachten lineare Abbildungen zwischen $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^4$ mit den Standardbasen $B_2 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ bzw. $B_4 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$. Eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} A\vec{e}_1 &= -2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4 \\ A\vec{e}_2 &= \vec{e}_1 + \vec{e}_4\,. \end{aligned}$$

Eine weitere Abbildung $B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} B\vec{e}_1 &= \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ B\vec{e}_2 &= 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ B\vec{e}_3 &= \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 \\ B\vec{e}_4 &= 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen von A und B bzgl. der Basen B_2 und B_4.

b) Berechnen Sie

$$A(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2), \quad A(-2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2), \quad B(-2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4), \quad B(\vec{e}_1 + \vec{e}_4).$$

c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der Abbildung $B \circ A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bzgl. der Basis B_2.

61. Eigenvektoren und Eigenwerte

2+2=4 Punkte

Die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ besitzt bzgl. der Standardbasis B des $\mathbb{R}^3$ die Abbildungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3), \quad \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 - \vec{e}_3), \quad \vec{u}_3 = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\left(\tfrac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \tfrac{1}{2}\vec{e}_3\right)$$

orthonormale Eigenvektoren der Abbildung A sind.

b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von A bzgl. der Basis $E = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.