Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse

Mathematische Methoden – Blatt 2

Wintersemester 2024/25

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/mathmeth_24.html/*
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5966594.html

Abgabe: Dienstag, den 29.11.2024, 23:59 Uhr

5. Zur Diskussion

0 Punkte

a) Was ist ein Skalarprodukt? Wie lauten die definierenden Eigenschaften?

b) Wann sind zwei Vektoren orthogonal?

c) Wie bestimmt man die Norm eines Vektors? Wie bestimmt man den Winkel zwischen zwei Vektoren?

d) Was ist eine Orthonormalbasis (ONB)?

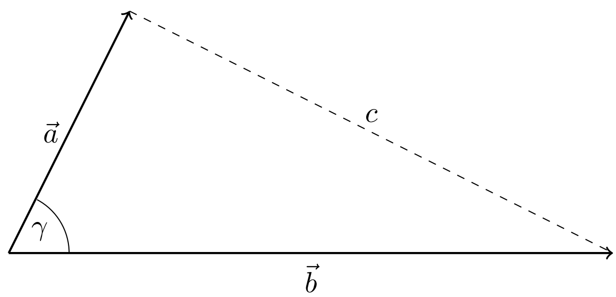
6. Skalarprodukt und Geometrie

3+3+3=9 Punkte

a) Der Kosinussatz setzt Winkel und Seitenlängen eines allgemeinen Dreiecks zueinander in Beziehung:

$$c^2 \;=\; a^2 \,+\, b^2 \,-\, 2\,a\,b\,\cos\gamma\,.$$

Beweisen Sie den Kosinussatz mittels Vektorrechnung.



b) a und b seien die Kantenlängen eines Parallelogramms, e und f die Längen seiner Diagonalen. Zeigen Sie, dass $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$.

c) Zeigen Sie schließlich, dass sich die Diagonalen eines gleichseitigen Parallelogramms ($a = b$) immer im rechten Winkel schneiden.

7. Orthonormalbasen

4+4=8 Punkte

$B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\, \vec{e}_4)$ sei eine Orthonormalbasis eines euklidischen Vektorraums. Die Vektoren

$$\vec{f}_1 \;=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}_B, \quad \vec{f}_2 \;=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}_B, \quad \vec{f}_3 =\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}_B, \quad \vec{f}_4 =\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}_B$$

bilden eine weitere Basis $B' = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\, \vec{f}_4)$.

a) Zeigen Sie, dass Basis B' eine *Orthonormal*basis ist.

b) Stellen Sie die Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}_B$$

in der Basis B' dar.

8. Skalarprodukt für Funktionen

3+3=6 Punkte

Die stetigen Funktionen $[-1,1] \to \mathbb{R}$ bilden mit Addition $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ und Skalarmultiplikation $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ einen Vektorraum V.

a) Zeigen Sie, dass das durch

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

definierte Produkt zweier Funktionen f und g aus V ein *Skalarprodukt* ist.

b) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$f(x) = 1, \quad g(x) = x, \qquad h(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

bzgl. des Skalarprodukts aus **a)** paarweise orthogonal zueinander stehen.

9. Summe

5 Punkte

Beweisen Sie folgende Summenformel:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1+\frac{1}{N}} \qquad (N \in \mathbb{N}).$$

Was ist dann $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots$ = ?