Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse

Mathematische Methoden – Blatt 3

Wintersemester 2024/25

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/mathmeth_24.html/*
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5966594.html

Abgabe: Dienstag, den 5.11.2024, 23:59 Uhr

10. Zur Diskussion

0 Punkte

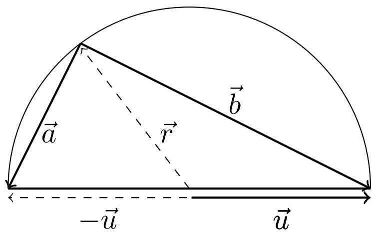
a) Wie berechnet man das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ in Komponenten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bzgl. einer ONB?

b) Die Koordinaten der Eckpunkte eines Dreiecks seien $(0,0)$, (x_1, x_2) und (y_1, y_2). Begründen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks durch $\frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|$ gegeben ist.

11. Satz des Thales

4 Punkte

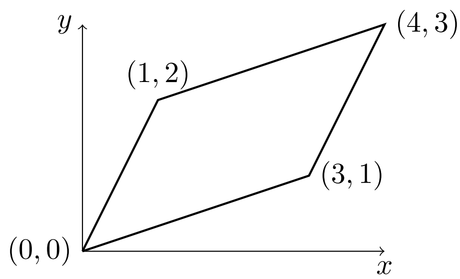
Ein Dreieck ist wie in der Skizze einem Halbkreis eingeschrieben. Nach dem Satz des Thales ist ein so konstruiertes Dreieck immer ein rechtwinkliges Dreieck. Beweisen Sie diesen Satz mittels des Skalarprodukts. Hinweis: Stellen Sie die Kantenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ durch die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{r}$ dar und beachten Sie, dass $|\vec{u}| = |\vec{r}|$.



12. Vektorprodukt

2+4+4=10 Punkte

a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des abgebildeten Parallelogramms.



b) Zeigen Sie, dass das Volumen eines durch drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Tetraeders gegeben ist durch $V = \frac{1}{6}|\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle|$.
(Hinweis: Das Volumen eines Tetraeders ist $\frac{1}{3}$ · Grundfläche · Höhe.)

c) $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sei eine ONB. Betrachten Sie zwei Tetraeder, einen aufgespannt durch $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$, und den anderen durch $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\frac{1}{3}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$. Skizzieren Sie die beiden Tetraeder, und berechnen Sie deren Volumen.

13. Geraden im Raum

2+6+4=12 Punkte

Das Bild der Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \vec{g}(t) = \vec{r} \, + \, \vec{u}\, t$ beschreibt eine Gerade g im $\mathbb{R}^3$ durch den Punkt $\vec{r}$, parallel zu $\vec{u}$.

a) Skizzieren Sie in der Ebene $x_3 = 0$ die Gerade g für

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Eine weitere Gerade f sei gegeben durch $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto f(t) = \vec{s} + \vec{v}t$. Wir wollen den Abstand d dieser Geraden f zur Geraden g ermitteln. Begründen Sie anhand der geometrischen Eigenschaften von Skalar- und Vektorprodukt, dass für $\vec{u} \nparallel \vec{v}$

$$d \;=\; \frac{|\, \langle \vec{r} - \vec{s}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle \,|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \,,$$

während für $\vec{u} \parallel \vec{v}$

$$d \;=\; \frac{|(\vec{r} - \vec{s}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} \,.$$

c) Speziell sei nun für die Gerade f

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie den Abstand d der Geraden f zur Geraden g mit den Parametern aus **a)**.

14. Koordinatentransformation

5 Punkte

Die lokale Basis B der sphärischen Koordinaten (r, ϑ, φ) besteht aus den orthonormalen Baisvektoren

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\vartheta \, \cos\varphi \\ \sin\vartheta \, \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta \, \cos\varphi \\ \cos\vartheta \, \sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie den Vektor $\vec{u} = u\vec{e}_3$ in Komponenten der lokalen Basis B dar. Wie lauten diese Komponenten am *Nordpol* mit sphärischen Koordinaten $(r, \vartheta, \varphi) = (1, 0, 0)$, am *Südpol* mit $(r, \vartheta, \varphi) = (1, \pi, 0)$, und an einem äquatorialen Punkt mit $(r, \vartheta, \varphi) = (1, \frac{\pi}{2}, 0)$?