Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse

Mathematische Methoden – Blatt 4

Wintersemester 2024/25

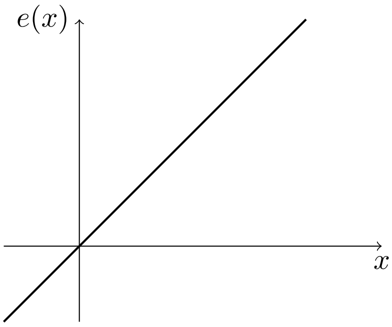
Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/mathmeth_24.html/*
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5966594.html

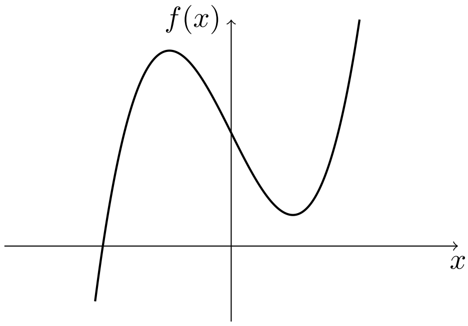
Abgabe: Dienstag, den 12.11.2024, 23:59 Uhr

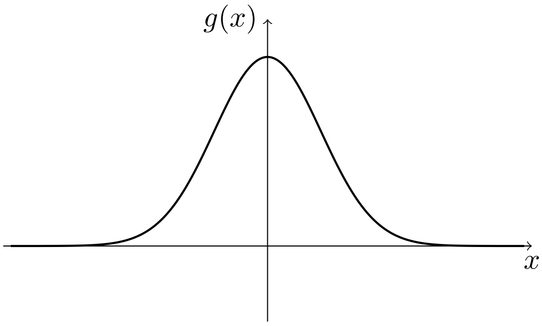
15. Zur Diskussion

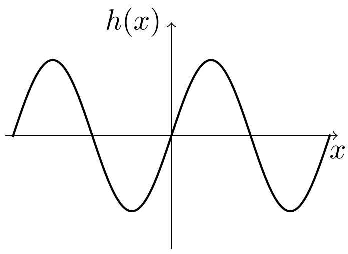
0 Punkte

Skizzieren Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:









16. Ableitung

2+2=4 Punkte

a) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = 1/x^2$ $(x \neq 0)$ elementar mit Hilfe des Differenzenquotienten.

b) Bestimmen Sie die Ableitung von $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

17. Ebene Kurve

2+3+5=10 Punkte

Eine Kurve in der Ebene sei durch die Punkte mit Polarkoordinaten $(r(\varphi), \varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi[$,

$$r(\varphi) \;=\; \frac{1}{1 + \varepsilon \cos\varphi}$$

gegeben. Hierbei ist $\varepsilon \in [0, 1[$ ein fest gewählter Parameter.

a) Wie groß sind für $\varepsilon > 0$ der minimale und maximale Abstand der Kurve zum Ursprung o?

b) Skizzieren Sie die Kurve einmal für $\varepsilon = 0$ und einmal für $\varepsilon = 1/2$.

c) Nun betrachten wir die Kurve (für festgewähltes $\varepsilon \in [0, 1[$) in einem kartesischen Koordinatensystem, dessen Ursprung o' gegenüber dem Ursprung o des Polarkoordinatensystems um

$$c = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}$$

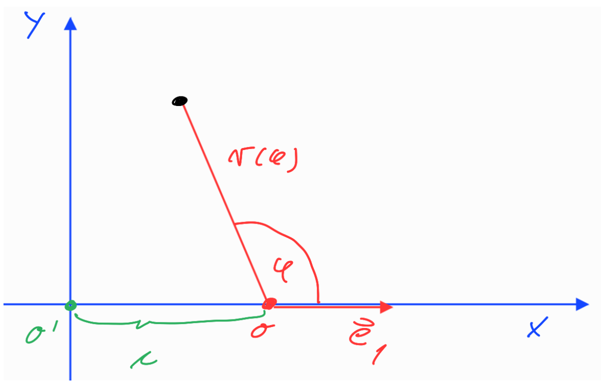
in negative $\vec{e}_1$-Richtung verschoben ist (vgl. Sizze). Zeigen Sie, dass die kartesischen Koordinaten (x, y) eines jeden Punkts der Kurve der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \;=\; 1$$

genügen, wobei

$$a = \frac{1}{1 - \varepsilon^2}, \qquad b = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}.$$

Tragen Sie die Größen a, b und c in die Kurve mit $\varepsilon = 1/2$ ein. Um was für eine Kurve handelt es sich?



18. Vektorprodukt und Levi-Civita-Symbol *2+2+4+4=12 Punkte*

Rechnungen mit dem Vektorprodukt können oft durch die Verwendung des (dreidimensionalen) *Levi-Civita-Symbols* ε_{ijk} für Indizes $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ vereinfacht werden. Wir definieren hier das Symbol mittels einer rechtshändigen ONB $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ und Spatprodukt durch

$$\varepsilon_{ijk} := \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \times \vec{e}_k \rangle \ . \tag{1}$$

a) Begründen Sie anhand dieser Definition folgende Eigenschaften des Symbols:

1. $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{231} = 1$
2. $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1$
3. ε_{ijk} verschwindet sobald zwei der Indizes i, j, k übereinstimmen.
4. ε_{ijk} ändert sich nicht unter *zyklischer Permutation* der Indizes: $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij}$.
5. ε_{ijk} wechselt das Vorzeichen unter *antizyklischer Permutation* der Indizes: $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$.

b) Zeigen Sie, dass mit $\vec{a} = \sum_j a_j \vec{e}_j$ und $\vec{b} = \sum_k b_k \vec{e}_k$

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk}\, a_j b_k \ , \quad \text{bzw.} \quad \vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk}\, a_j b_k\, \vec{e}_i \ .$$

Die Summationsindizes laufen hier wie im Folgenden jeweils von 1 bis 3.

c) Begründen Sie anhand der Definition (1), dass

$$\sum_i \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{ilm} \ = \ \langle \vec{e}_j \times \vec{e}_k, \vec{e}_l \times \vec{e}_m \rangle \ ,$$

und folgern Sie daraus die Identität

$$\sum_i \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{ilm} \ = \ \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \ . \tag{2}$$

d) Zeigen Sie schließlich mit den erzielten Resultaten folgende Identität für das doppelte Vektorprodukt:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \ = \ \vec{b}\,\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle - \vec{c}\,\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle.$$