Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse

Mathematische Methoden – Blatt 5

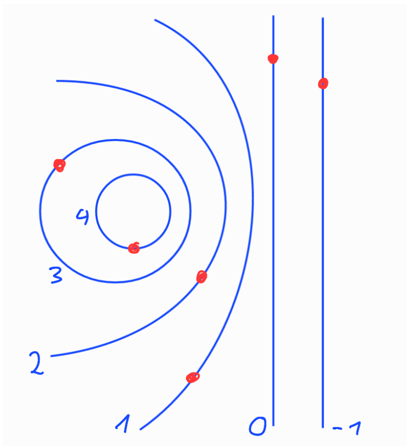
Wintersemester 2024/25

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/mathmeth_24.html/*
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5966594.html

Abgabe: Dienstag, den 19.11.2024, 23:59 Uhr

18. Zur Diskussion *0 Punkte*

Das Bild zeigt Niveaulinienen einer reelen Funktion in zwei Variablen. Skizzieren Sie in den angegebenen Punkten jeweils die Richtung des Gradienten der Funktion ein.



19. Taylor-Entwicklung *8 Punkte*

Ermitteln Sie für folgende Funktionen die Taylor-Entwicklung bis einschließlich dritter Ordnung um $x_0 = 0$:

$$e^x, \qquad \sin x, \qquad \cos x, \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,.$$

20. Potenzreihe von $\sin x$ *4+4 Punkte*

a) Beweisen Sie mittels Induktion über $n \in \mathbb{N}$:

$$(\sin x)^{(2n)} = (-1)^n \sin x, \qquad (\sin x)^{(2n+1)} = (-1)^n \cos x.$$

b) Begründen Sie folgende Potenzreihendarstellung von $\sin x$:

$$\sin x \;=\; x - \tfrac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \tfrac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5} - \tfrac{x^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \cdots - \cdots \quad \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}\,.$$

21. Logarithmus

4+2=6 Punkte

a) Zeigen Sie:

$$\ln(1-x) \;=\; -x - \tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^4}{4} \cdots \;=\; -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\,.$$

b) Plotten Sie die Funktion $f(x) = \ln(1-x)$ und ihre Taylor-Entwicklungen erster, zweiter und dritter Ordnung (um $x_0 = 0$) für $x \in [-0.5, 0.5]$.

22. Partielle Ableitungen und Gradient

4 Punkte

Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen und den Gradienten der Funktion

$$f(\vec{r}) \;=\; e^{-|\vec{r}|^2}\,, \qquad \vec{r} = (x_1, x_2, x_3)\,.$$

23. Gradient

2+3=5 Punkte

Ein Funktion f in zwei Variablen x_1, x_2 ist gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{4} + x_2^2\,.$$

a) Skizzieren Sie die Niveaulinie $f(x_1, x_2) = 1$.

b) Bestimmen Sie den Gradienten von f, und zeichnen Sie den Vektor $\mathrm{grad} f(x_1, x_2)$ an den Punkten $(2, 0)$, $(0, 1)$ $(-2, 0)$ und $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ in die Skizze aus Aufgabenteil **a)** ein.