

Mathematische Methoden – Blatt 6

Wintersemester 2024/25

Webpage: http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmeth_24.html/
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5966594.html

Abgabe: Dienstag, den 26.11.2024, 23:59 Uhr

24. Potenzreihe von $\cos x$

2+2 Punkte

a) Beweisen Sie mittels Induktion über $n \in \mathbb{N}$:

$$(\cos x)^{(2n)} = (-1)^n \cos x, \quad (\cos x)^{(2n+1)} = (-1)^{n+1} \sin x.$$

b) Begründen Sie folgende Potenzreihendarstellung von $\cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

25. Gradient

4 Punkte

Berechnen Sie die Gradienten folgender Funktionen:

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{r}, \quad g(\vec{r}) = r^2, \quad h(\vec{r}) = \langle \vec{k}, \vec{r} \rangle, \quad j(\vec{r}) = \cos(\langle \vec{k}, \vec{r} \rangle),$$

wobei $r = |\vec{r}|$ und $\vec{k}$ ein konstanter Vektor ist.

26. Lokale Basis der sphärischen Koordinaten

4 Punkte

Die Abbildung

$$(r, \vartheta, \varphi) \mapsto \vec{r}(r, \vartheta, \varphi) = r \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

transformiert sphärische Koordinaten (r, ϑ, φ) auf kartesische Koordinaten (x_1, x_2, x_3) . Hieraus folgen die Vektoren $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$ der lokalen Basis durch die Beziehungen

$$\vec{e}_r = \frac{1}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r}, \quad \vec{e}_\vartheta = \frac{1}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta}|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta}, \quad \vec{e}_\varphi = \frac{1}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}.$$

Berechnen Sie hiermit die Vektoren $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$ in Komponenten bzgl. der Standardbasis.

27. Bahn

3+3 Punkte

Die Bahn eines Teilchens in der Ebene ist gegeben durch

$$\vec{r}(t) = R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(2\omega t) \end{pmatrix},$$

wobei R und ω positive Konstanten geeigneter Dimension sind.

- a) Skizzieren Sie die Bahn für $R = 2\text{cm}$, $\omega = 2\pi/s$, $t \in [0, 1s]$.
- b) Berechnen Sie Geschwindigkeit und Beschleunigung des Teilchens als Funktion der Zeit. Welche Beschleunigung liegt bei $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$ und $t_2 = \frac{3\pi}{2\omega}$ vor? Tragen Sie die entsprechenden Bahnpunkte in der Skizze aus a) ein.

28. Geschwindigkeit und Beschleunigung

3+3 Punkte

- a) Wir betrachten zwei vektorwertige Funktionen $\vec{f}, \vec{g} : \mathbb{R} \rightarrow V$, wobei V ein euklidischer Vektorraum ist. Zeigen Sie folgende verallgemeinerte Produktregel:

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{f}, \vec{g} \rangle = \langle \dot{\vec{f}}, \vec{g} \rangle + \langle \vec{f}, \dot{\vec{g}} \rangle.$$

- b) Ein Teilchen bewegt sich auf einer Bahn $\vec{r}(t)$ mit einer Geschwindigkeit von konstantem Betrag v_0 . Zeigen Sie, dass zu allen Zeiten die Beschleunigung des Teilchen senkrecht zur Geschwindigkeit steht.
[Hinweis: $|\vec{v}(t)|^2$ nach der Zeit ableiten.]