Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln R. Klesse

# Mathematische Methoden – Blatt 7

*Wintersemester 2024/25*

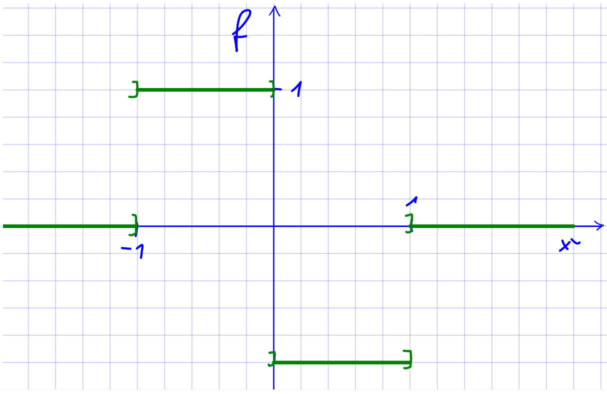
**Webpage:** *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/mathmeth_24.html/*
*https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5966594.html*

**Abgabe:** Dienstag, den 3.12.2024, 23:59 Uhr

## 29. Zur Diskussion *0 Punkte*

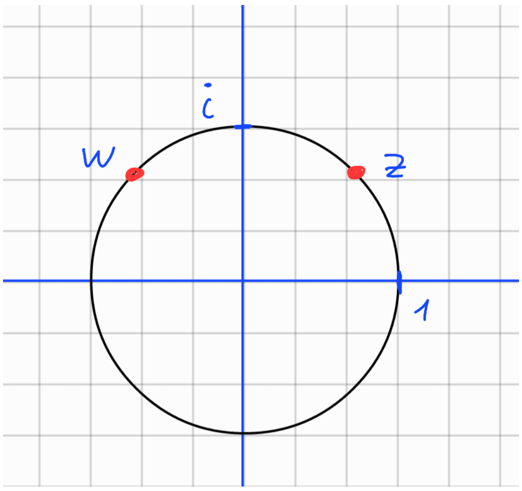
**a)** Was ist eine Stammfunktion?

**b)** Die Skizze zeigt den Graphen einer Funktion $f$. $F_0$ sei Stammfunktion von $f$ und es gelte $F_0(0) = 0$. Zkizzieren Sie den Graphen der Stammfunktion $F_0$.




**c)** Wie Verhalten sich Beträge und Argumente komplexer Zahlen unter Multiplikation?

**d)** In der komplexen Ebene sind zwei komplexe Zahlen $w$ und $z$ eingetragen:




Zeichnen Sie folgende komplexe Zahlen ebenfalls in die Skizze ein:

$$-i, \quad -z, \quad -w, \qquad \frac{1}{i}, \quad \frac{1}{z}, \quad \frac{1}{w}, \qquad iz, \quad -iz, \quad \frac{z}{i}, \qquad z+w, \quad z-w, \quad zw, \quad \frac{z}{w}\,.$$

Vermeiden Sie dabei algebraische Rechnungen, argumentieren Sie geometrisch.

## 30. Bewegter Beobachter *4 Punkte*

Die ortsabhängige Temperatur eines Mediums sei durch die Funktion $T(\vec{r})$ beschrieben. Ein Sonde bewegt sich auf einer Bahn $\vec{r}(t)$ durch das Medium und zeichnet auf ihrem Weg die zeitabhängige Temperatur $T_s(t) := T(\,\vec{r}(t)\,)$ auf. Zeigen Sie, dass

$$\frac{d}{dt}T_s(t) = \langle\, \mathrm{grad}\, T(\vec{r}(t)),\ \vec{v}(t)\,\rangle\,,$$

wobei $\vec{v}(t)$ die momentane Geschwindigkeit des Teilchen zur Zeit $t$ ist.

## 31. Stammfunktionen *1+4=5 Punkte*

**a)** $f(x)$ sei eine positive Funktion. Zeigen Sie, dass dann $G(x) = \ln f(x)$ eine Stammfunktion der Funktion $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ ist.

**b)** Zeigen Sie:

$$\int\limits_0^{\pi/4} \tan x\, \mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{2},$$

$$\int\limits_a^b \frac{1}{x \ln x}\, \mathrm{d}x = \ln\left(\frac{\ln b}{\ln a}\right) \qquad (1 < a < b).$$

## 32. Halbkreis *1+3=4 Punkte*

**a)** Zeigen Sie, dass $F(x) = \frac{1}{2}(\sin(x)\cos(x) + x)$ eine Stammfunktion von $f(x) = \cos^2(x)$ ist.

**b)** Berechnen Sie folgendes Integral durch die Substitution $x = \sin(y)$ und mittels Aufgabenteil **a)**:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx\,.$$

Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

## 33. Uneigentliche Integrale *4 Punkte*

Das uneigentliche Integral $\int_2^\infty \frac{1}{x} dx$ ist bekanntlich divergent. Wie steht es mit der Konvergenz der uneigentlichen Integrale

$$\int_2^\infty \frac{1}{x}\frac{1}{\ln x} dx \qquad \text{und} \qquad \int_2^\infty \frac{1}{x}\frac{1}{(\ln x)^2} dx \qquad ?$$

## 34. Schwarzkörperstrahlung *4 Punkte*

In einer zweidimensionalen Welt wäre die Strahlungsleistung $u(T)$ eines schwarzen Körper der Temperatur $T$ durch folgende Formel gegeben:

$$u(T) \;=\; \alpha \int_0^\infty h\nu\, \nu\, \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1}\, d\nu$$

Hierbei ist $h$ das Plancksche Wirkungsquantum, $K$ die Boltzmannkonstante und $\alpha$ eine weitere Konstante. Zeigen Sie, dass $u(T) \propto T^3$.