Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse

Mathematische Methoden – Blatt 8

Wintersemester 2024/25

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmeth_24.html/*
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5966594.html

Abgabe: Dienstag, den 10.12.2024, 23:59 Uhr

35. Zur Diskussion *0 Punkte*

a) Wie beweist man die Euler-Identität $e^{i\varphi} = \cos\varphi \, + \, i\sin\varphi$?

b) Was ist eine Differenzialgleichung (DGL)?

c) Was ist eine spezielle Lösung einer DGL $y' = f(y)$ zu einem Anfangswert y_0 bei $x = x_0$? Wie kann man diese Lösung näherungsweise numerisch bestimmen?

d) Wie lautet die spezielle Lösung der DGL $y' = ay$ zum Anfangswert y_0 bei $x_0 = 0$?

36. Rechnen mit komplexen Zahlen *10 Punkte*

Bestimmen Sie jeweils Betrag, Inverses, Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:

$$1 + 2i, \quad \frac{1}{1+i}, \quad \frac{1}{i}, \quad (1+2i)(1-3i), \quad e^{i\pi/4}, \quad \sqrt{-9}\,.$$

37. Euler-Identität I *2+3=5 Punkte*

Im Folgenden sei $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Euler-Identität:

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} \, + \, e^{-ix}), \qquad \sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} \, - \, e^{-ix})\,.$$

b) Zeigen Sie mittels **a)**:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\sin x)' = \cos x\,.$$

38. Euler-Identität II *3+3=6 Punkte*

a) Bestimmen Sie:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{(-a+ik)x}\mathrm{d}x \qquad (k \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+).$$

b) Bestimmen Sie mittels **a)** und Euler-Identität:

$$\int_0^\infty \cos(kx)\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x, \qquad \int_0^\infty \sin(kx)\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x \qquad (k \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+).$$

39. Differenzialgleichungen

4×2=8 Punkte

Bestimmen Sie zu folgenden Differenzialgleichungen jeweils die Lösung zum Anfangswert y_0 bei $x_0 = 0$:

$$y' = \frac{y}{1+x}\,, \qquad y' = \frac{y}{(1+x)^2}\,, \qquad y' = x^3\,, \qquad y' = y+1.$$

40. Freier Fall in zäher Flüssigkeit

1+5+4=10 Punkte

Ein Körper der Masse m fällt in einer Flüssigheit hoher Viskosität lotrecht zu Boden. Neben der konstanten Schwerkraft

$$\vec{F}_s = mg\vec{e}_3, \qquad g = 9.81m/s^2,$$

($\vec{e}_3$ ist also die lotrechte Richtung) wirkt eine durch die Viskosität der Flüssigkeit verursachte Reibungskraft $\vec{F}_r$ auf den Körper. Diese Kraft ist betraglich proportional zum Geschwindigkeitsbetrag $|\vec{v}|$, und der Bewegungsrichtung $\hat{v}$ entgegengesetzt, d.h.

$$\vec{F}_r = -m\alpha\vec{v}.$$

Hierbei ist α eine positive Konstante. Im Folgenden beschränken wir uns auf den Fall eines sich nur in lotrecher Richtung bewegenden Körpers. Die entsprechende Geschwindigkeitskomponente $v \equiv v_3$ genügt dann nach Newton der DGL

$$\dot{v} = g - \alpha v\,.$$

a) Nach hinreichend langer Zeit fällt der Köper mit annähernd konstanter Geschwindigkeit vom Betrag v_g. Bestimmen Sie v_g direkt aus der DGL.

b) Bestimmen Sie $v(t)$ für eine gegebene Anfangsgeschwindigkeit v_0 bei $t = 0$.

c) Skizzieren Sie nun für Parameter $\alpha = 1/s$ die Geschwindigkeit $v(t)$ für drei verschiedene Anfangsgeschwindigkeiten $v_0 = 0m/s$, $10m/s$, $20m/s$ und Zeiten $t \in [0, 5s]$. Verwenden Sie dazu $g = 10m/s^2$.