Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse

Mathematische Methoden – Blatt 9

Wintersemester 2024/25

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/mathmeth_24.html/*
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5966594.html

Abgabe: Dienstag, den 17.12.2024, 23:59 Uhr

41. Zur Diskussion

0 Punkte

a) Was ist eine separierbare DGL?

b) Wie können Lösungen einer separierbaren DGL ermittelt werden?

42. Differenzialgleichungen

3×3=9 Punkte

Bestimmen Sie zu folgenden Differenzialgleichungen jeweils die Lösung zum Anfangswert y_0 bei $x_0 = 0$:

$$y' = \cos(x)y\,, \qquad y' = x^2y^3\,, \qquad y' = \frac{\sqrt{y}}{1+x}\,.$$

43. Freier Fall mit Luftwiderstand

2+6+2=10 Punkte

Ein Körper fällt unter dem Einfluss einer konstanten Schwerebeschleunigung $g \approx 10m/s^2$ und einer zum Betragsquadrat der Geschwindigkeit proportionalen Luftwiderstandskraft senkrecht zu Boden. Der Betrag v der Geschwindigkeit genügt damit der DGL

$$\dot{v} = g - \alpha v^2\,,$$

wobei der Parameter $\alpha > 0$ die Stärke der Luftwiderstandskraft beschreibt.

a) Welche Grenzgeschwindigkeit v_g erreicht der fallende Körper nach sehr langer Zeit?

b) Bestimmen Sie $v(t)$ für $v_0 = 0$ bei $t = 0$. Skizzieren Sie diese Lösung.
Hinweis: Trennung der Variablen, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{2}{1-x^2}$.

c) Fallschirmspringer erreichen typischerweise Fallgeschwindigkeiten von etwa 200km/h (bevor der Fallschirm geöffnet wird). Schätzen Sie mittels Ihrer Ergebnisse aus **a)** und **b)** die Zeitdauer zwischen Absprung und dem Erreichen von 90% dieser Geschwindigkeit.

44. Labiles Gleichgewicht

5+5=10 Punkte

Ein Körper der Masse m bewegt sich längs einer Geraden. Er unterliegt einer vom Ort x des Körper abhängigen Kraft

$$F(x) = +kx, \qquad k > 0$$

und einer geschwindigkeitsabhängigen Reibungskraft

$$F(\dot{x}) = -\gamma m\dot{x}\,.$$

Nach Newton genügt $x(t)$ damit der Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} - \frac{k}{m}x = 0.$$

a) Bestimmen Sie eine allgemeine Lösung dieser DGL.

b) Wie lautet $x(t)$, wenn bei verschwindender Reibung ($\gamma = 0$) der Körper zur Zeit $t = 0$ am Ort x_0 ruht? Skizzieren Sie $x(t)$ für $x_0 = -1$, 0 und 1 ($k = 1$, $m = 1$).