1. Klausur Mathematische Methoden für das Lehramt

im Wintersemester 2021/22

(Zeit: 180 Minuten)

Bitte **leserlich** in **Druckschrift** ausfüllen:

Name:	Vorname:
Übungsgruppe:	Matrikelnummer:

Hiermit versichere ich, dass ich die Klausur selbstständig, ohne Verwendung von unzulässigen Hilfsmitteln angefertigt habe und obige Angaben der Wahrheit entsprechen.

____

Unterschrift

Aufgaben-Nr.	bearbeitet **(bitte selbst ankreuzen)**	mögliche Punktzahl	erreichte Punktzahl	Korrektor
1		10		
2		6		
3		5		
4		6		
5		6		
6		8		
7		10		
8		7		
9		5		
10		6		
11		6		
12		5		
Gesamt		**80**		

Die Klausur ist mit 40 Punkten bestanden.

1. Kurzfragen **(1+2+2+1+2+2=10)**

a) Ein Parallelogramm werde durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt. Wie bestimmt sich der Flächeninhalt des Parallelogramms anhand der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$?

b) Bestimmen Sie folgende Integrale:

$$\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{e}^{-x^4}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int_{0}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^5\,\sin(x)^2\right)\mathrm{d}x.$$

c) Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r}) = \alpha\,\vec{r}$ durch die SphÃďre von Radius R und Mittelpunkt o. Hierbei ist α eine Konstante.

d) Wie lautet die Euler-IdentitÃďt?

e) Geben Sie zur Differenzialgleichung $\dot{y} = \beta\,y$ eine spezielle Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = 2$ an. β ist eine reelle Konstante.

f) Was lautet die allgemeine Lösung des ungedämpften harmonischen Oszillators, beschrieben durch die Differnzialgleichung $\ddot{x} + \omega^2\,x = 0$?

2. Orthonormalbasen **(3+3=6)**

Gegeben sei eine Orthonormalbasis $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ eines euklidischen Vektorraums, und zwei weitere Vektoren $\vec{f}_1 := \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2)$ und $\vec{f}_2 := \frac{1}{\sqrt{5}}(2\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2)$.

a) Zeigen Sie, dass $B' = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ auch eine Orthonormalbasis ist.

b) Stellen Sie den Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}_B$ in der Basis B' dar.

3. Satz des Pythagoras **(5)**

Beweisen Sie den Satz des Pythagoras mithilfe des Skalarproduktes.

4. Taylor-Entwicklung **(6)**

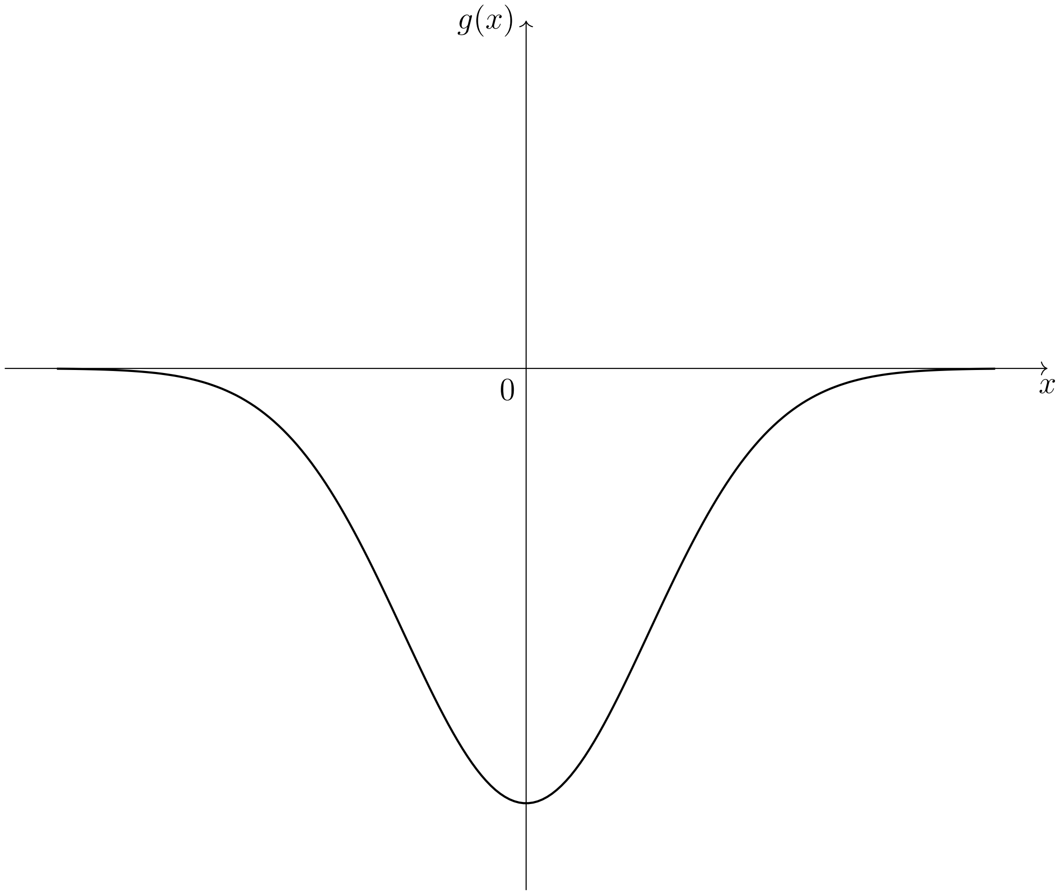
Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung der Funktion $f(x) = \ln(1 + x)$ um $x = 0$ bis zur einschließlich zweiten Ordnung.

5. Ableitung und Stammfunktion am Funktionsgraphen (3+3=6)

Unten ist der Graph einer Funktion $g(x)$ angegeben. Skizzieren Sie direkt im Graphen...

a) ... die Ableitung von $g(x)$.

b) ... eine Stammfunktion von $g(x)$.



6. Bahnkurve (2+4+2=8)

Ein Teilchen bewege sich gemäß

$$\vec{r}(t) = R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \end{pmatrix} .$$

Hierbei ist R eine konstante Länge und ω eine konstante Frequenz.

a) Skizzieren Sie die Bahnkurve des Teilchens ($R = 1$, $\omega = 1$).

b) Berechnen Sie Geschwindigkeit und Beschleunigung des Teilchens.

c) Zeichnen Sie in Ihre Skizze Geschwindigkeit und Beschleunigung bei $t = \frac{\pi}{2\omega}$ ein.

7. Wegintegral (10)

Der Weg c durchlaufe gegen den Uhrzeigersinn in der xy-Ebene einen Kreis mit Radius R und Mittelpunkt o. Der Weg starte und ende nach einem Umlauf bei $(R, 0, 0)$. Bestimmen Sie das Wegintegral $\int_c \vec{A}\,\mathrm{d}\vec{l}$ für das *nicht-konservative* Vektorfeld

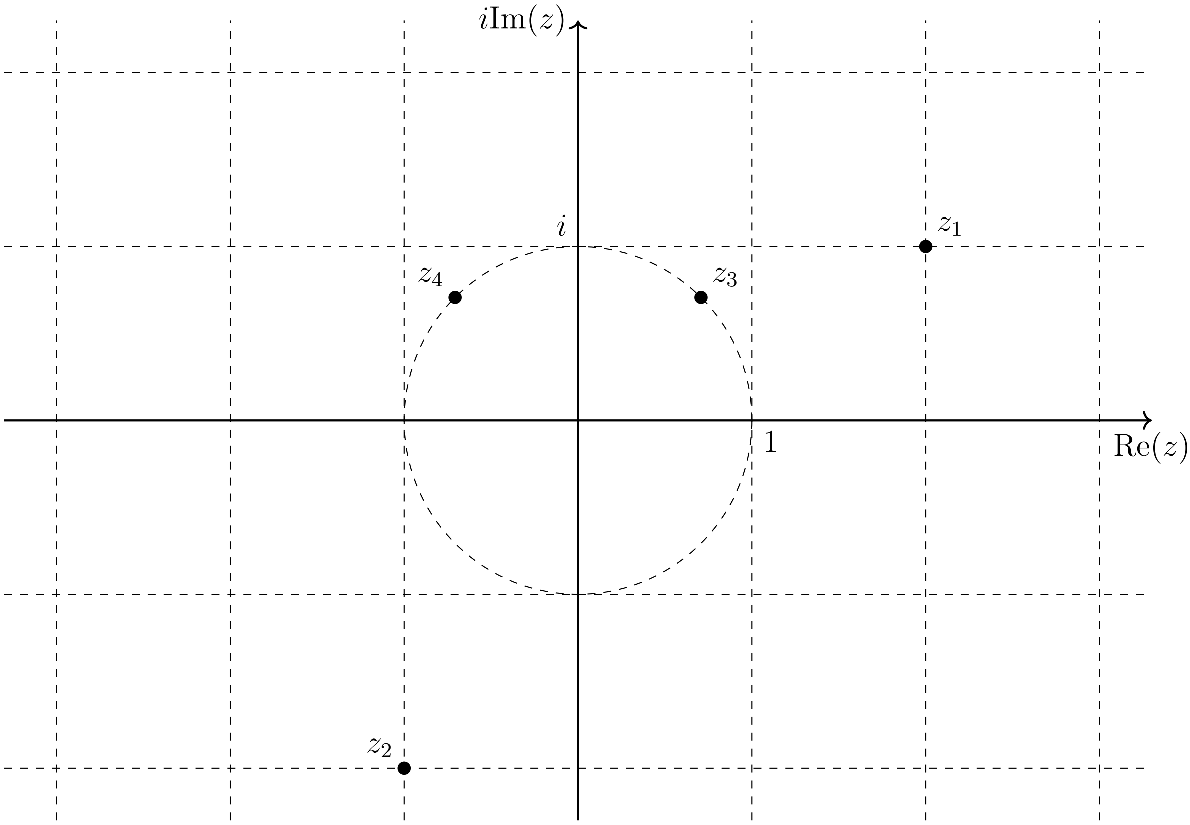
$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} .$$

8. Komplexe Ebene (7)

In der komplexen Ebene sind die komplexen Zahlen z_1, z_2, z_3 und z_4 eingetragen. Tragen Sie ebenso folgende komplexe Zahlen ein:

$a)$ z_1^* , $b)$ $z_1 + z_2$, $c)$ $z_3 z_4$, $d)$ $z_3^* z_3$,

$e)$ $\frac{1}{2}(z_1 + z_1^*)$, $f)$ $\frac{1}{2}(z_1 - z_1^*)$, $g)$ $\dfrac{1}{z_3}$.



9. Masse eines Vollzylinders (5)

Betrachten Sie einen Zylinder Z mit Höhe h, Radius R, und Dichte $m(\rho) = \rho^4$, wobei ρ den Abstand zur Symmetrieachse des Zylinders angibt. Bestimmen Sie mithilfe von einem Volumenintegral die Masse des Zylinders $M = \int_Z m(\rho)\,\mathrm{d}V$.
Hinweis: Sie müssen das Volumenelement in Zylinderkoordinaten nicht herleiten.

10. Differenzialgleichungen (6)

Bestimmen Sie die spezielle Lösung der Differenzialgleichung $\dot{y} = y^{-2}$ zur Anfangsbedingung $y(0) = y_0 > 0$.

11. Kraftfelder und Potenziale (2+2+2=6)

a) Gegeben sei das Potenzial $\Phi(\vec{r}) = 2x^2 + y + z$. Bestimmen Sie das dazugehörige Kraftfeld.

b) Finden Sie ein Potenzial zum Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = \alpha\,\vec{r}$. Hierbei ist α eine reelle Konstante.

c) Der Weg c verlaufe geradlinig von $\vec{r}_1 = (2, 0, 0)$ nach $\vec{r}_2 = (0, 0, 1)$. Bestimmen Sie

$$W = -\int_c \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{l}$$

für das Kraftfeld $\vec{F}$ aus b).

12. Drehimpulserhaltung (5)

Ein Teilchen bewege sich unter dem Einfluss eines Zentralkraftfelds. Zeigen Sie, dass der Drehimpuls des Teilchens erhalten ist.