

1. Klausur Mathematische Methoden für das Lehramt
im Wintersemester 2023/24
(Zeit: 180 Minuten)

Name:	Vorname:
Übungsgruppe:	Matrikelnummer:

Hiermit versichere ich, dass ich die Klausur selbstständig, ohne Verwendung von unzulässigen Hilfsmitteln angefertigt habe und obige Angaben der Wahrheit entsprechen.

Unterschrift

Aufgaben-Nr.	bearbeitet (bitte selbst ankreuzen)	mögliche Punktzahl	erreichte Punktzahl	Korrektor
1		5		
2		4		
3		4		
4		8		
5		11		
6		10		
7		10		
8		10		
9		5		
10		8		
11		5		
Gesamt		80		

Die Klausur ist mit 40 Punkten bestanden.

Mathematische Methoden – 1. Klausur

Wintersemester 2023/24

Einsicht: Mittwoch, den 28.02.2024, 13:00 Uhr, Seminarraum Theoretische Physik (Altbau)

1. Orthonormalbasis

4+1=5 Punkte

$B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ sei eine Orthonormalbasis eines euklidischen Vektorraums. Eine weitere Orthonormalbasis B' des Vektorraums besteht aus den Basisvektoren

$$\begin{aligned}\vec{f}_1 &= \frac{1}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4), \\ \vec{f}_2 &= \frac{1}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4), \\ \vec{f}_3 &= \frac{1}{2}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4), \\ \vec{f}_4 &= \frac{1}{2}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4).\end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die Komponenten des Vektors

$$\vec{u} = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 - 4\vec{e}_4$$

bzgl. der Orthonormalbasis B' .

b) Bestimmen Sie die Norm des Vektors $\vec{u}$.

2. Taylorentwicklung

4 Punkte

Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ um $x_0 = 0$ bis einschließlich zweiter Ordnung in x .

3. Gradient

2+2=4 Punkte

Berechnen Sie die Gradienten folgender auf den $\mathbb{R}^3$ definierten Funktionen ($\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$):

$$f(\vec{r}) = \sin(x_1) \cos(x_2) e^{-x_3^2}, \quad g(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}|^3}.$$

4. Bahn, Geschwindigkeit, Beschleunigung

4+4=8 Punkte

Ein Teilchen bewegt sich längs einer Bahn

$$\vec{r}(t) = \vec{d} + \vec{u}t + \frac{1}{2}\vec{b}t^2,$$

wobei $\vec{d}$, $\vec{u}$ und $\vec{b}$ konstante Vektoren sind.

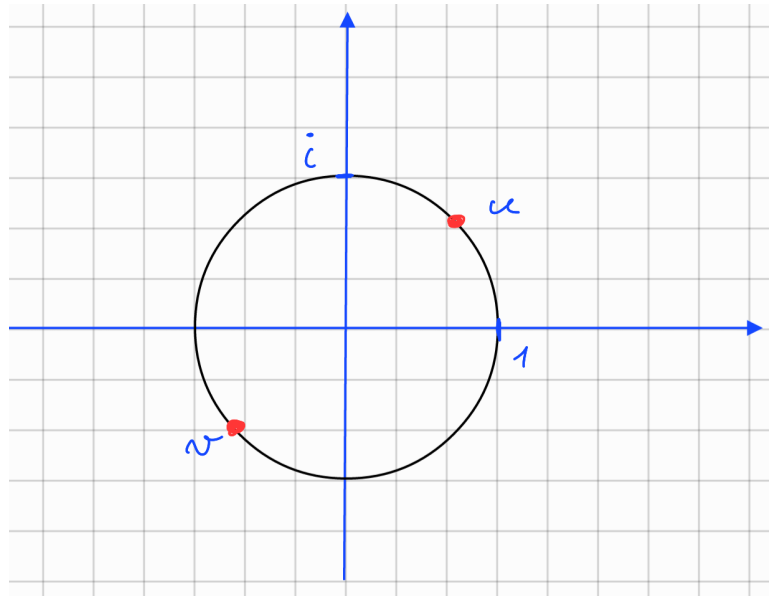
a) Bestimmen Sie Geschwindigkeit und Beschleunigung des Teilchens als Funktion der Zeit t .

b) Skizzieren Sie die Bahn des Teilchens in der $(\vec{e}_1\vec{e}_2)$ -Ebene für $\vec{d} = \vec{0}$, $\vec{u} = 1 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \vec{e}_1$ und $\vec{b} = 1 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \vec{e}_2$ für Zeiten $t \in [0, 2\text{s}]$.

5. Komplexe Zahlen

5+6=11 Punkte

- a) In der komplexen Ebene sind zwei komplexe Zahlen u und v eingetragen. Tragen Sie die komplexen Zahlen $u + v$, $u - v$, uv , v/u und u^* ebenfalls in die komplexe Ebene ein.



- b) Gegeben sind die komplexen Zahlen

$$a = 2 - i, \quad b = (1 - i)(2 + i), \quad c = e^{-i\pi/2}.$$

Bestimmen Sie:

$$|a|, \quad a^*, \quad \operatorname{Im}(a^{-1}), \quad \operatorname{Re}(b), \quad \operatorname{Im}(c), \quad c^{-1}.$$

6. Differenzialgleichungen

2+5+3=10 Punkte

- a) Bestimmen Sie die spezielle Lösung $y(t)$ der Differenzialgleichung

$$\dot{y} = 2y$$

zum Anfangswert $y = 3$ bei $t = 0$.

- b) Bestimmen Sie eine allgemeine Lösung $y(t)$ der Differenzialgleichung

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 3y = 0.$$

- c) Bestimmen Sie die spezielle Lösung $y(t)$ der DGL aus **b)** zu Anfangswerten $y = 0$ und $\dot{y} = 2$ bei $t = 0$.

7. Determinanten

1+2+3+4=10 Punkte

Bestimmen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \cos \varphi & 0 & -5 \sin \varphi \\ 2 \sin \varphi & 0 & 5 \cos \varphi \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Eigenwerte und Eigenvektoren

3+4+3=10 Punkte

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) A sei eine Matrix mit Eigenwert λ zu einem Eigenvektor $\vec{u}$. Zeigen Sie: $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda$ ist Eigenwert der Matrix $B = A^3 + A^2 + A$ zu Eigenvektor $\vec{u}$.

9. Kurvenintegral

5 Punkte

Das Vektorfeld $\vec{A}$ ist gegeben durch $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{r}$. Ein Weg c ist parametrisiert durch $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \vec{c}(t)$ mit

$$\vec{c}(t) = \vec{a} + \vec{b}t.$$

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind konstante Vektoren mit $\vec{a} \perp \vec{b}$ und $|\vec{b}| = 1$. Bestimmen Sie das Kurvenintegral $\int_c \vec{A} d\vec{l}$.

10. Rotation und Satz von Stokes

3+5=8 Punkte

a) Bestimmen Sie die Rotation des Vektorfelds

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Das Flächenstück S sei die Kreisscheibe in der x_1x_2 -Ebene von Radius 1 und Mittelpunkt in $(1, 1, 0)$. Bestimmen Sie das Kurvenintegral des Vektorfelds $\vec{A}(\vec{r})$ aus a) längs des Randes ∂S von S : $\int_{\partial S} \vec{A} d\vec{l}$.

11. Satz von Gauß

5 Punkte

Elektrisches Feld $\vec{E}$ und elektrische Ladungsdichte ρ genügen dem Gaußschen Gesetz:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho.$$

Folgern Sie hieraus mittels des Satz von Gauß:

Der elektrische Fluss durch die Oberfläche eines Volumens ist gleich der in dem Volumen enthaltenen Ladung dividiert durch ε_0 .