

Mathematische Methoden

Themen:

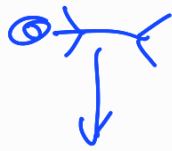
- Vektoren und Vektorräume
- Koordinatensysteme
- Analysis: Funktion, Ableitung, Integral, in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$
- komplexe Zahlen
- Differenzialgleichungen
- Lineare Algebra: lineare Abbildung, Matrix, Determinante, Eigenwert u. Eigenvektor
- Fouriertransformation
- Vektoranalysis: Differenzialoperatoren, Integralsätze von Gauß und Stokes

→ Anwendungen^{o)} und Verständnis
physikalischer Theorien

(Mechanik, Thermodynamik, Elektro-
dynamik, Spezielle Relativitätstheorie, Quantenmechanik, ...)

Beispiele

a) senkrechte Fall:



$$v(0) = 0$$

$$v(t) = ?$$

Newton:

$$m a \stackrel{!}{=} \vec{F} \quad (*)$$



(i) ohne Luftwiderstand:

$$\vec{F} = \vec{F}_g = m \vec{g}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2$$



$$\cancel{m} a \stackrel{!}{=} \cancel{m} g \rightarrow a = \underline{\underline{g}} \quad ||$$

→ freier Fall = Bewegung konst. Besch.
($g = 10 \text{ m/s}^2$)

$$\rightarrow v(t) = g t \quad (\rightarrow \dot{v}(t) = g \\ v'(t) = g!)$$



(ii) mit Luftwiderstand:

$$\rightarrow F = F_g - F_w$$

$$F_g = mg$$

$$F_w = h v^2$$

$$(L = c_w \cdot A \frac{\rho}{2})$$

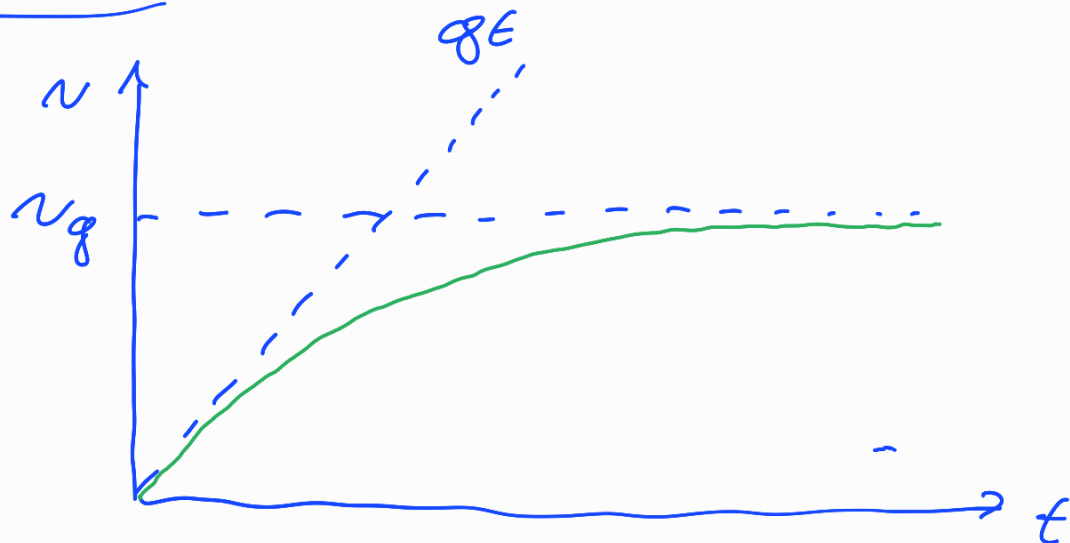
$$\rightarrow m a = mg - h v^2 \quad ?$$

$$a = \dot{v}(t)$$

$$v(0) = 0$$

$$\rightarrow \dot{v}(t) \stackrel{!}{=} g - \frac{h}{m} v^2(t)$$

qualitativ :



Für große Zeiten: $g - \frac{h}{m} v^2 \approx 0$

$$\rightarrow \dot{v}(t) = 0!$$

$\rightarrow$ Grenzgeschwindigkeit $v_g = \sqrt{\frac{mg}{h}}$

quantitativ: suche Funktion $v(t)$

($t \geq 0$, $\underline{v(0)=0}$) die für alle Zeiten t die Gleichung

$$(*) \quad \dot{v}(t) = g - \frac{b}{m} v(t)^2$$

d.h.: $v(t)$ ist Lösung der
Differentialgleichung $(*)$

zum Anfangswert $v(0)=0$.

2> späte!

b) Quantenmechanik: essentielle Eigenschaften:

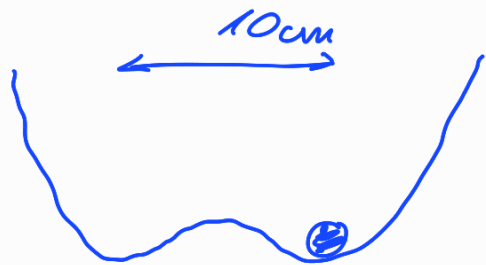
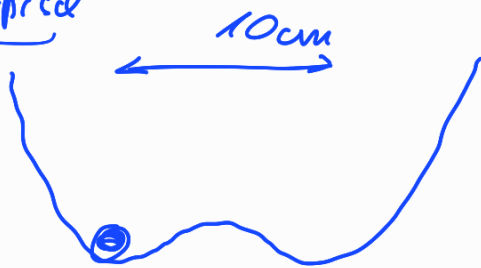
Schlafher:

1 Überlagerungsfähigkeit der Zustände

2 Bedeutung der Messung
($\hat{=}$ QM!)

Bsp.: Teilchen im "Doppelwandelpotential"
($1g = m$)

makroskopisch

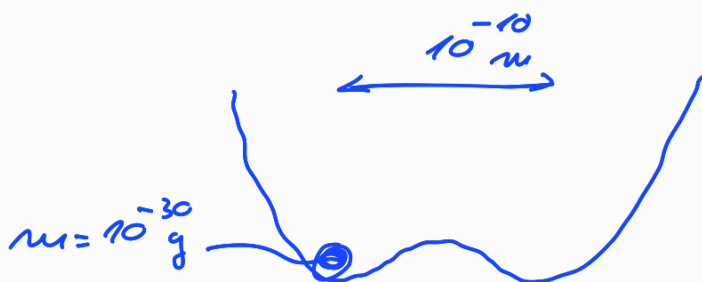


Zustände:

L

R

mikroskopisch



Zustände

L

R

Q: postuliert: Teilchen kann sich im Überlagerungszustand von L und R

befinden: " $U = L + R$ " ?!

→ Q: Überlagerungspostulat im Übereinkunft mit Vertikal / Realität / Beobachtung?

dazu unbedingt notwendig:

präzise Formulierung des Postulats in geeigneter Sprache $\stackrel{!}{=}$
lineare Algebra!

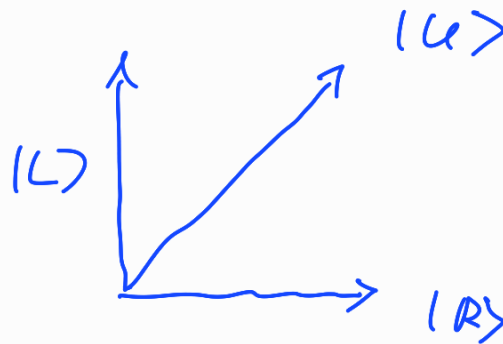
Q: Zustand $\hat{=}$ Vektor!

$$\begin{aligned} \leadsto L &\hat{=} \left(\vec{L} \right) \equiv \underline{\underline{|L\rangle}} & \text{"ket"} \\ R &\hat{=} \underline{\underline{|R\rangle}} \end{aligned}$$

→ Überlagerungszustand gegeben durch

$$|u\rangle = |L\rangle + |R\rangle \quad !$$

$$|L\rangle \perp |R\rangle$$

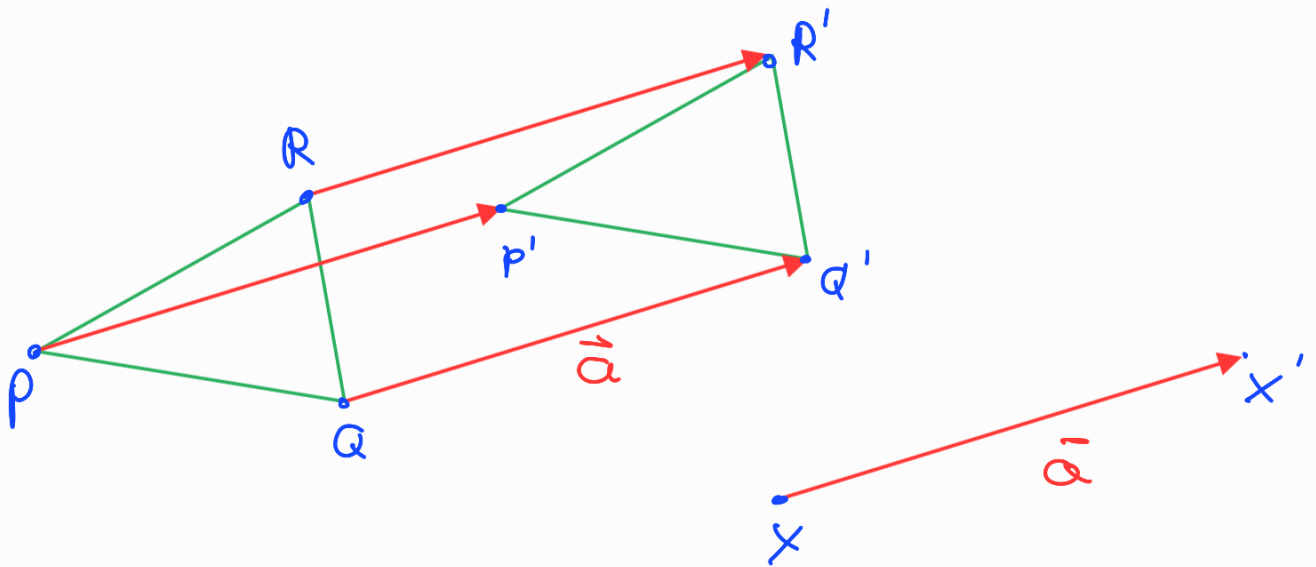


→ mehr dazu in TP II

Vektoren und Vektorräume

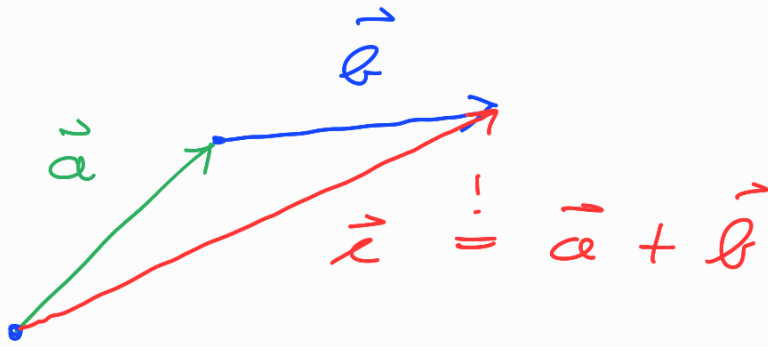
↪ hier: Translation als Prototyp eines Vektors
 ↑ ↑
 anschaulich abstrakt

Translation $\equiv$ Parallelverschiebung:



$$\hat{a} = \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{PP'} = \dots = \overrightarrow{XX'}$$

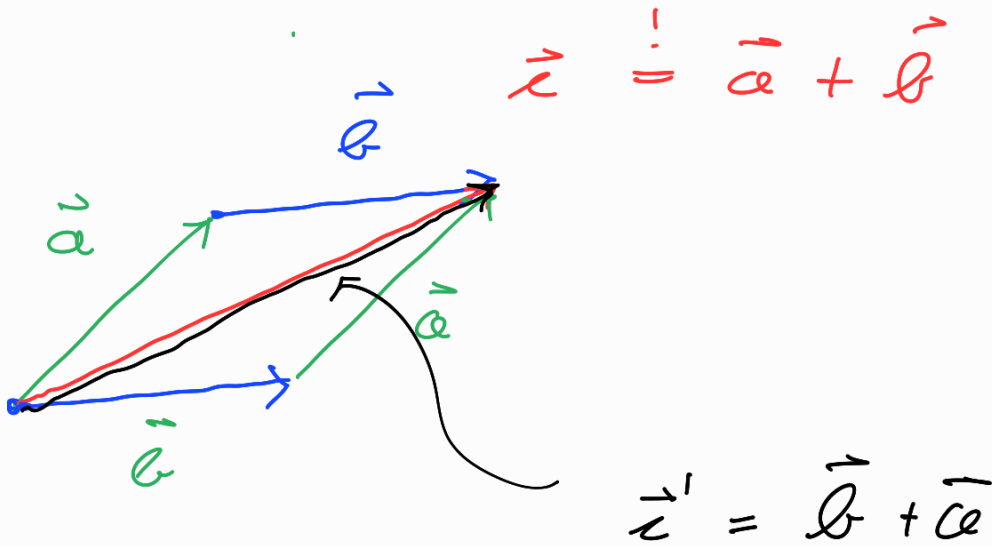
Hintereinandererschließung $\equiv$ Addition
von Transkripten



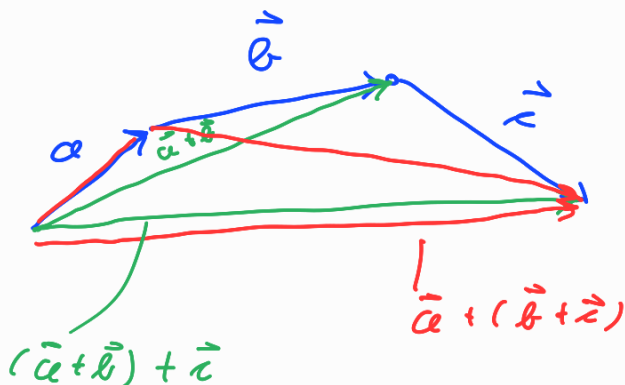
Eigenschaften:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (kommutativität)

geometrisch:



2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$



(Assoziativgesetz)

$$\underline{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}} \quad \left(\begin{array}{l} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \\ = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \end{array} \right)$$

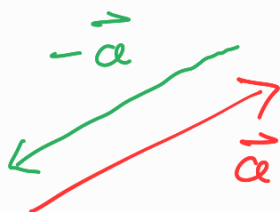
→ Klammern notwendig!

3) Existenz einer Null(-Translation)
 $\vec{0}$ mit der Eigenschaft:

$$\vec{a} + \vec{0} \stackrel{!}{=} \vec{a} \quad \text{für alle Translationen } \vec{a}$$

4) Existenz der inversen Translat.
 $(-\vec{a})$ der Translation $\vec{a}$ mit
 der Eigenschaft:

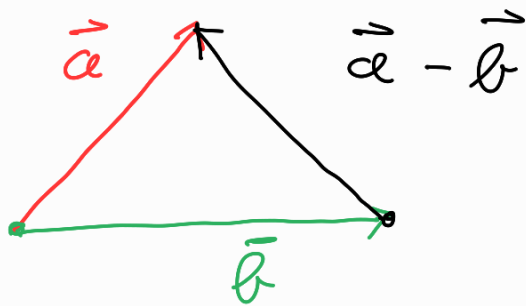
$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$



→ Subtraktion / Differenz
von $\vec{a}$ von $\vec{b}$:

$$\vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + (-\vec{b})$$

geometrisch:



Warum?:

$$\begin{aligned} \vec{b} + (\vec{a} - \vec{b}) &\stackrel{!}{=} \vec{a} \quad \checkmark \\ &= (\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} \\ &= \underbrace{\vec{a} + (-\vec{b})}_{\vec{0}} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \end{aligned}$$

Eigenschaften der Addition:

(A1) Assoziativität: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

(A2) Existenz der Null $\vec{0}$:

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \quad \text{für alle } \vec{a}$$

(A3) Existenz der inversen Transl.

$(-\vec{a})$ zu $\vec{a}$, damit dass

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

(A4) Kommutativität:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad .$$

