

allgemein: $f(\vec{r}) = g(|\vec{r}|) = g(r)$
 $|\vec{r}| = r$

$$\rightarrow \text{grad } f(\vec{r}) = g'(r) \cdot \hat{r}$$

$$\Gamma \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} g(|\vec{r}|) = g'(r) \cdot \underbrace{\frac{\partial |\vec{r}|}{\partial x_i}}_{= x_i/r} = g'(r) \frac{x_i}{r}$$

$$\rightarrow \text{grad } f(\vec{r}) = g'(r) \cdot \underbrace{\frac{1}{r} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{=\vec{r}} = \underline{\underline{g'(r) \cdot \hat{r}}}$$

Bsp: $\bullet \text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{1}{r}\right)' \cdot \hat{r} = -\frac{1}{r^2} \cdot \hat{r}$

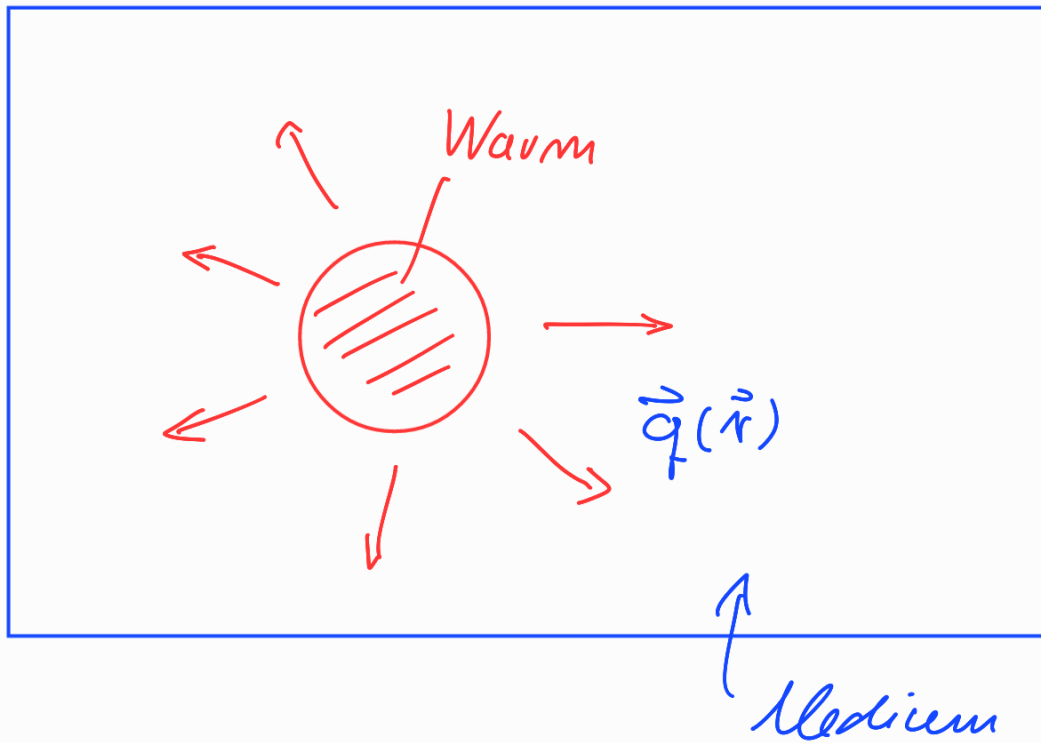
$\bullet \text{grad}(r^2) = 2r \cdot \hat{r} = 2\vec{r}$

$$\Gamma \text{grad}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} = 2\vec{r} \quad \perp$$

Beispiele: Anwendung des Gradienten in der

Physik:

Wärmeleitung



Wahl:

Wärmestromdichte $\vec{q}(\vec{r})$:

- $\hat{q}(\vec{r}) =$ Richtung des Wärmestroms am Ort $\vec{r}$
- $|\vec{q}(\vec{r})| =$ Stärke des Wärmestroms am Ort $\vec{r}$:

Dimensionen: $\frac{\text{Energie}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}}$

Temperatur am Ort $\vec{r}$: $T(\vec{r})$

$$\vec{q}(\vec{r}) \stackrel{?}{\leftrightarrow} T(\vec{r})$$

Phenomenologisches Gesetz:

$$\vec{q}(\vec{r}) = -\lambda \operatorname{grad} T(\vec{r})$$

λ = Wärmefähigkeit

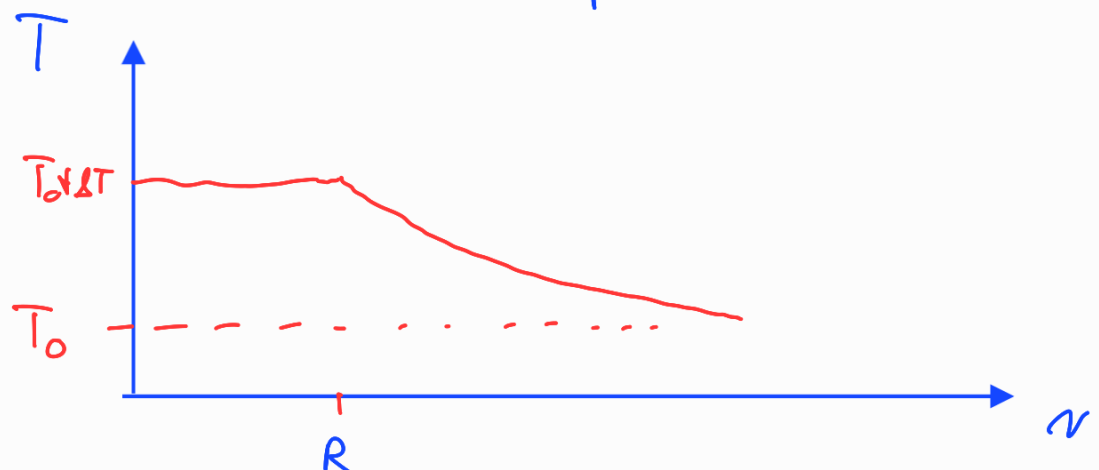
$$\text{Dimension } \lambda = \frac{\text{Energie}}{\text{zeit} \cdot \text{Länge} \cdot \text{Temp.}}$$

Bsp:



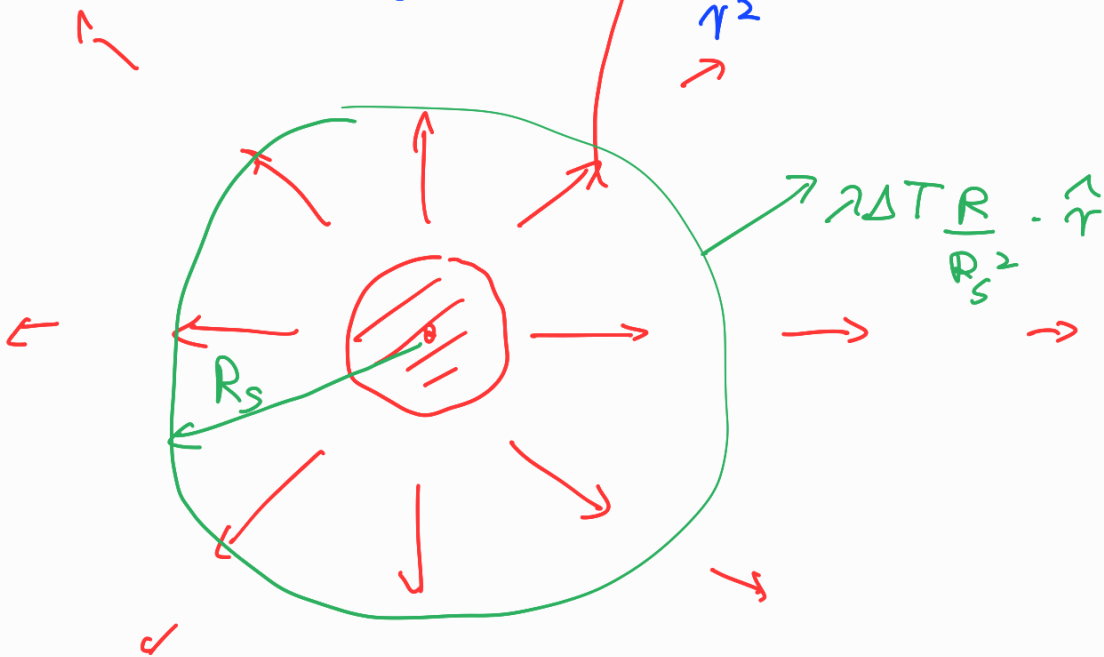
$r \rightarrow \infty$
 $\rightarrow T_0$

$$T(\vec{r}) = \begin{cases} T_0 + \Delta T & : |\vec{r}| < R \\ T_0 + \Delta T \frac{R}{r} & : |\vec{r}| \geq R \end{cases}$$



$$\Rightarrow \vec{g}(\vec{r}) = -\lambda \operatorname{grad} T(\vec{r})$$

$$= \begin{cases} \vec{0} & : |\vec{r}| < R \\ +\lambda \Delta f \frac{R}{r^2} \hat{r} & : |\vec{r}| \geq R \end{cases}$$



2. Mechanik :

Potenziale: $U(\vec{r})$

→ Kraft : $\vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad } U(\vec{r})$

Def: $U(\vec{r}) = \frac{\hbar^2}{2} |\vec{r}|^2 \rightarrow$

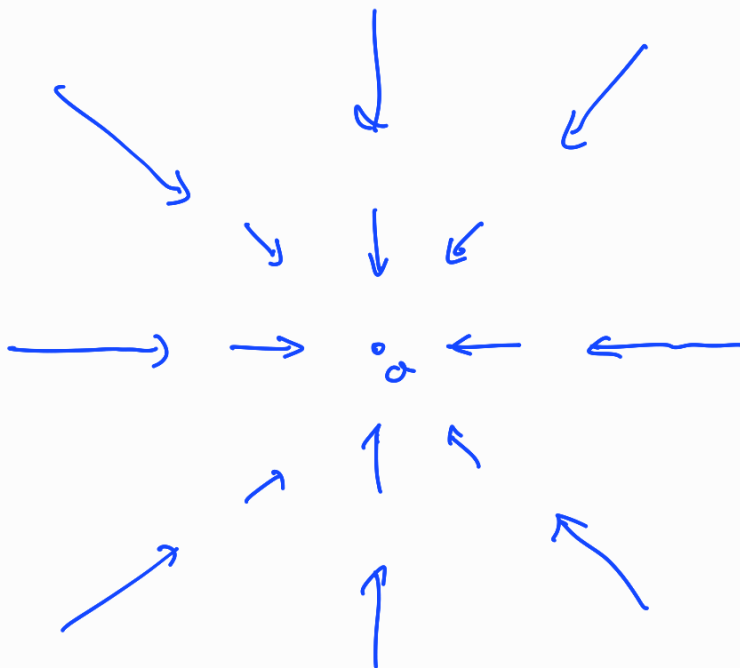
Potenzial $U(\vec{r}) = \frac{k}{2} r^2$

$$\rightarrow F(\vec{r}) = -\text{grad } U(\vec{r}) =$$

$$= -\frac{k}{2} \text{grad } r^2$$

$$= -\frac{k}{2} (r^2)' \cdot \hat{r} = -k \hat{r}$$

$$= -k r \hat{r}$$



Höhere partielle Ableitungen:

Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

part. Abl. $\frac{\partial}{\partial x_i}$ $\rightarrow$ 1. part. Abl. $\frac{\partial f}{\partial x_i}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $\vec{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$

$\frac{\partial}{\partial x_j}$ $\rightarrow$ 2. part. Abl.: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $\vec{x} \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x}) := \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(\vec{x})$

Satz von Schwarz:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f$$

Nächstes Thema:

Ableitungen von vektorwertige Fkten

$$f: \mathbb{R} \rightarrow V (= \mathbb{R}^n, = \mathbb{R}^3)$$

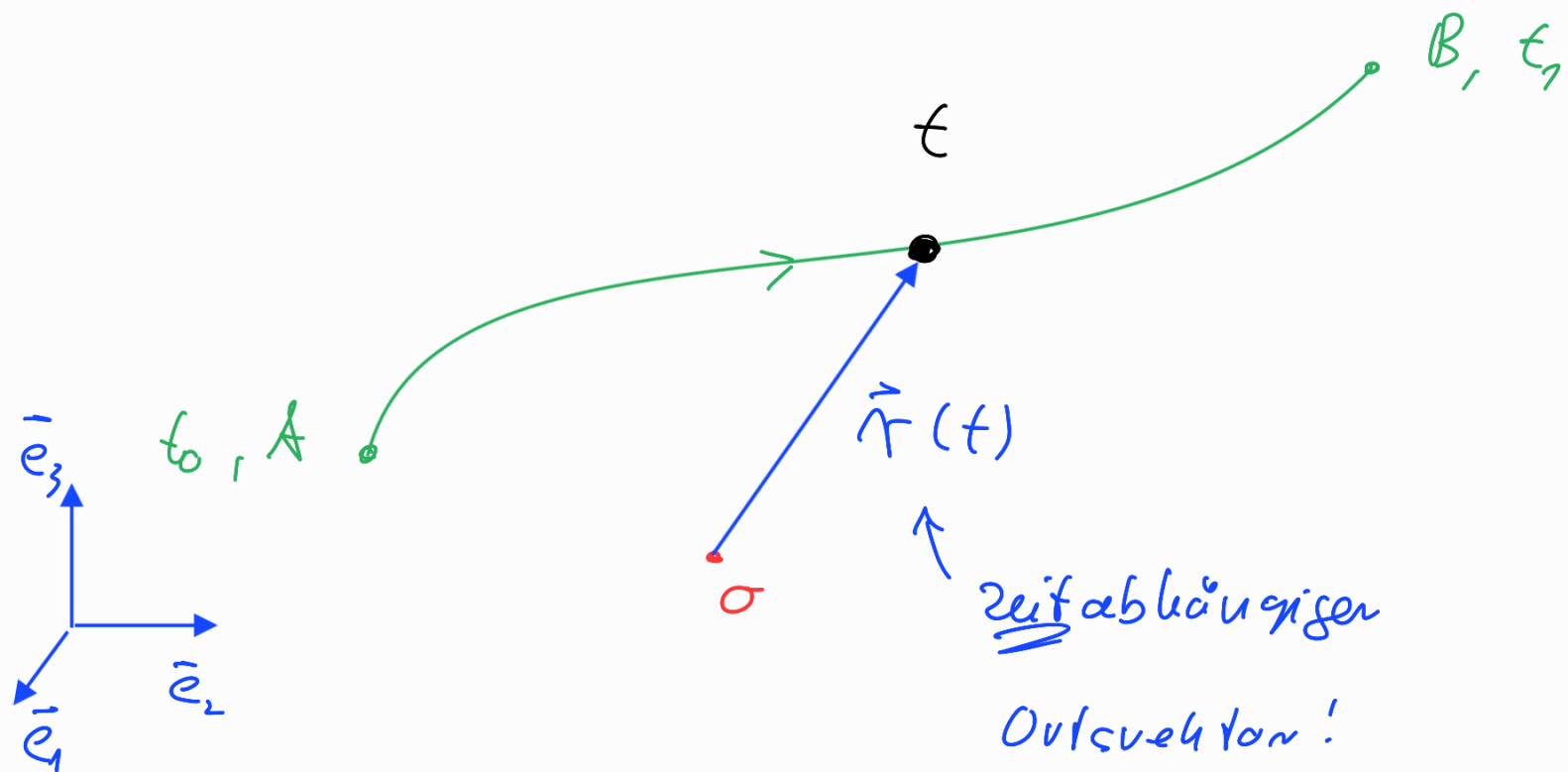
$$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Kinematik: Bahn, Geschwindigkeit,

Beschleunigung eines Massenpunkts (MP)

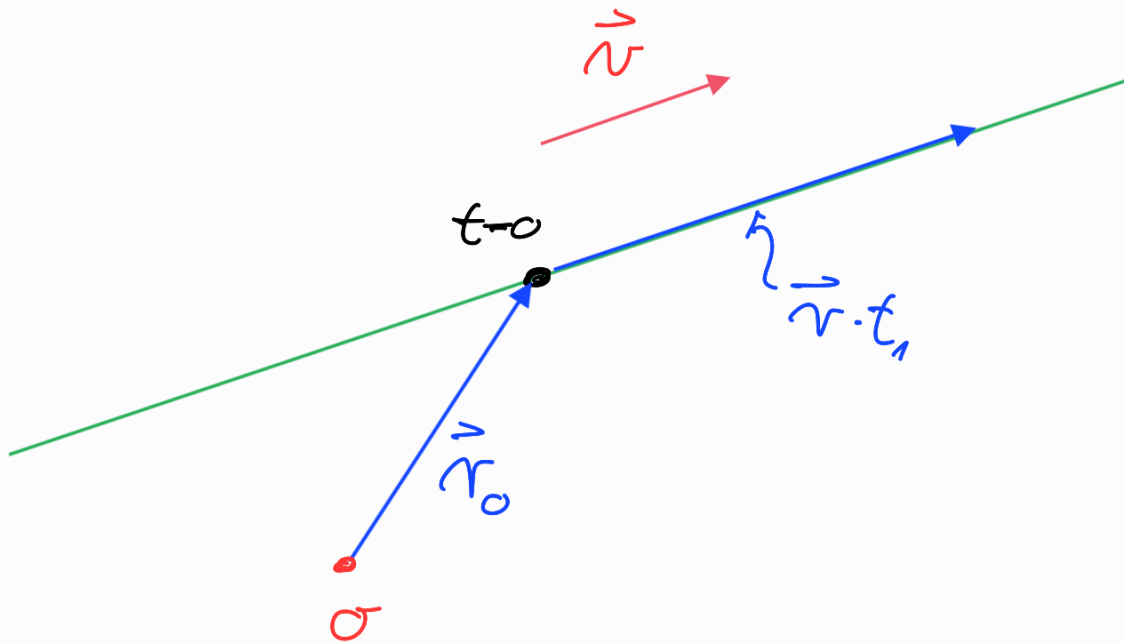
im Raum $\equiv$ 3dim Koordinatenraum $\equiv \mathbb{R}^3$

Bewegung eines MPs im Raum



$\leadsto$ Bahn des MPs $\hat{=}$ Abb. $\vec{r} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $t \mapsto \vec{r}(t)$

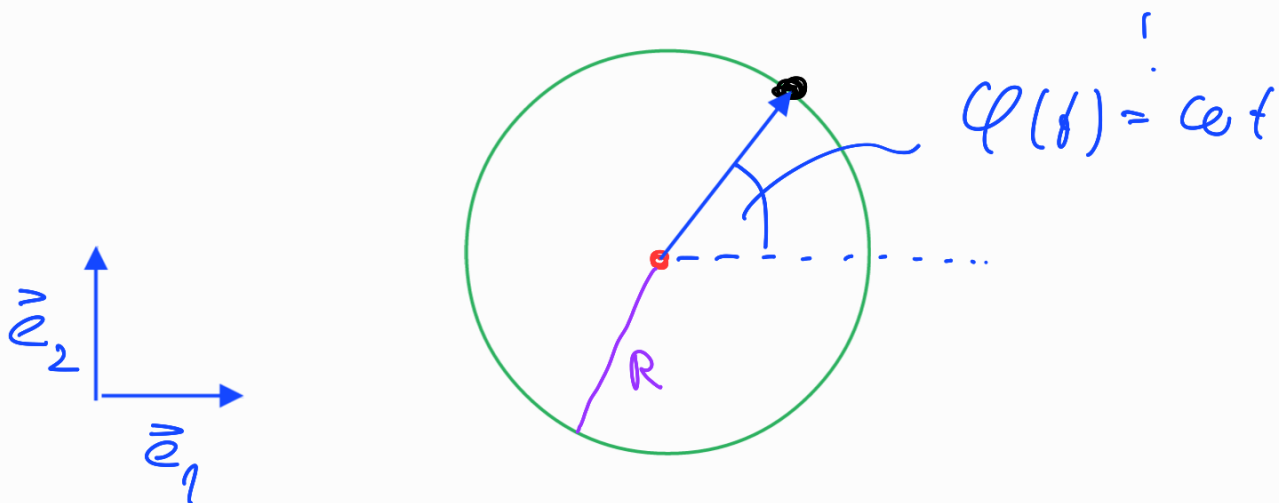
Beispiele: 1. geradlinig, gleichf. Bewegung:



Bahn $\hat{=}$ Abb $\vec{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$t \mapsto \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v} t$$

2. gleichförmige Kreisbewegung



$$\rightarrow \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cos \omega t \\ R \sin \omega t \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix} \quad \neq$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\text{Umlaufzeit}}} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\vec{r}(t+T) = \vec{r}(t) \quad !$$