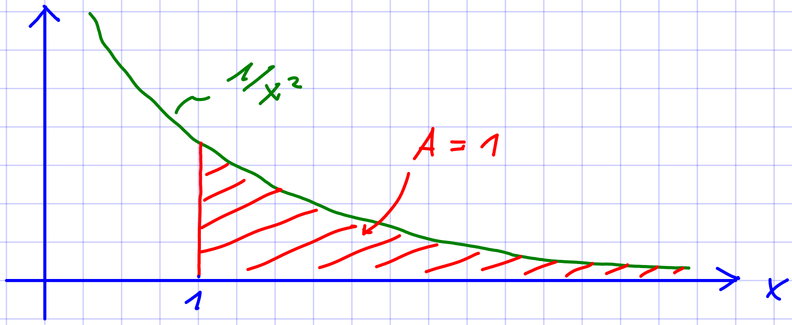
Nachtrag: uneigentliche Integrale

z. B.:

- $$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^b$$



$$= \lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right) = \underline{\underline{1}}$$

- $$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \ln b = \underline{\underline{\infty}}$$

↑ divergent!

- $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2$$

- $$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to 0} \int_a^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to 0} -\frac{1}{x}\Big|_a^1$$

$$= \lim_{a\to 0} \frac{1}{a} - 1 = \infty$$

↑ divergent!

Komplexe Zahlen

1) mathematisches Werkzeug

2) physikalische "Notwendigkeit" in der QM:

Zustandsraum = komplexer Vektorraum $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} \ni v \longrightarrow \lambda v$$

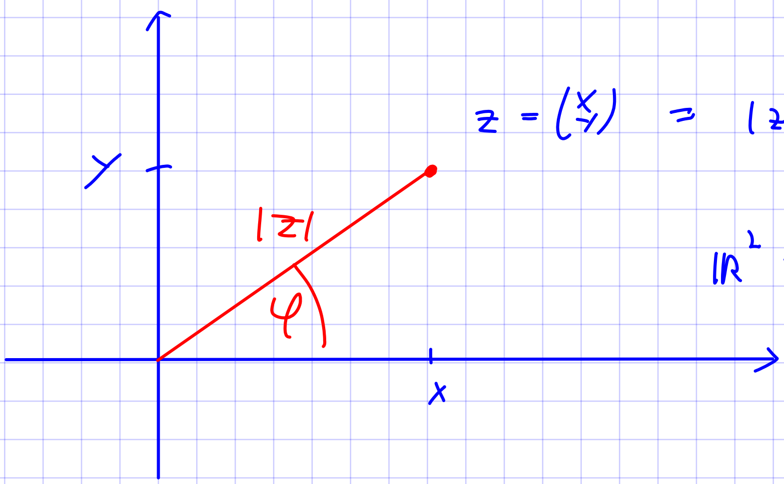
Skalarmultiplik. mit komplexen Zahl λ !

algebraisch: imaginäre Einheit i als Lösung der Gleichung $x^2 = -1$

d.h. $\boxed{i^2 = -1}$

hier: geometrisch

komplexe Zahl z := Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$



$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = |z| \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$$

Bezeichnungen:

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Realteil: $\mathrm{Re}\, z = x$

Imaginärteil: $\mathrm{Im}\, z = y$

Betrag / Modulus $\quad |z| := (x^2 + y^2)^{1/2} = \left((\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2 \right)^{1/2}$

Argument: $\arg z = \varphi := \measuredangle\left(\vec{e}_1, \binom{x}{y}\right)$

$\to$ **Polardarstellung:** $z = |z| \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$

$\mathbb{C}$ = Menge der komplexen Zahlen

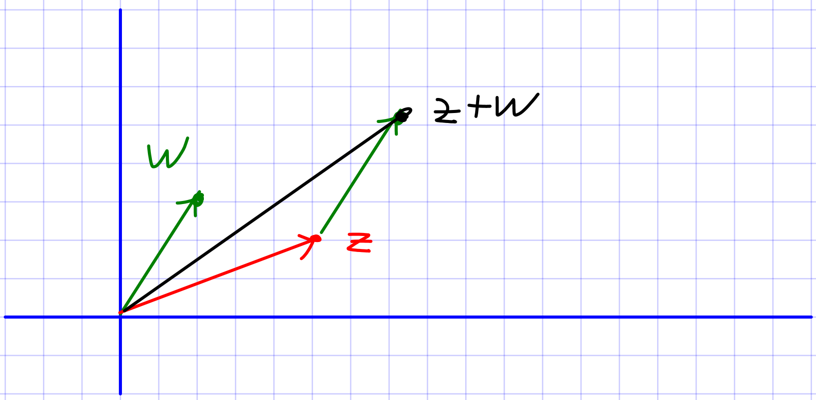
$\hat{=}$ "komplexe Zahlenebene"

$\hat{=}$ "Gaußsche Zahlenebene"

Addition komplexer Zahlen $\overset{\text{Def.}}{:=}$ Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$

d.h. $z = \binom{x}{y}$, $w = \binom{a}{b}$

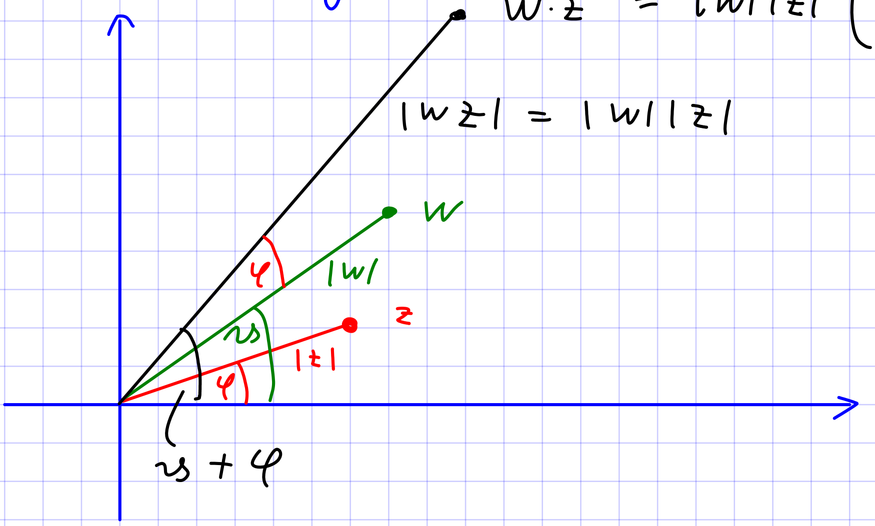
$\to$ $z + w = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \end{pmatrix}$ $\quad \to$ genügt A1 – A4 ✓



Multiplikation komplexer Zahlen

$w = \binom{a}{b}$, $z = \binom{x}{y}$: $\quad w \cdot z := \begin{pmatrix} ax - by \\ ay + bx \end{pmatrix}$

geometrische Bedeutung



$$w \cdot z = |w||z| \begin{pmatrix} \cos(\vartheta+\varphi) \\ \sin(\vartheta+\varphi) \end{pmatrix}$$

$$|wz| = |w||z|$$

warum? $\quad w = |w| \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad z = |z| \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$

$$w \cdot z = \begin{pmatrix} |w| \cos\vartheta \\ |w| \sin\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} |z| \cos\varphi \\ |z| \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{Def.}}{=} \begin{pmatrix} |w||z| \{ \overbrace{\cos\vartheta \cos\varphi - \sin\vartheta \sin\varphi}^{\cos(\vartheta+\varphi)} \} \\ |w||z| \{ \underbrace{\cos\vartheta \sin\varphi + \sin\vartheta \cos\varphi}_{\sin(\vartheta+\varphi)} \} \end{pmatrix}$$

$$= |w||z| \begin{pmatrix} \cos(\vartheta+\varphi) \\ \sin(\vartheta+\varphi) \end{pmatrix}$$

Eigenschaften der kompl. Multiplikation

1) kommutativ: $\quad w \cdot z = z \cdot w$ ✓

2) assoziativ: $\quad (v \cdot w) z = v \cdot (w z)$ ✓

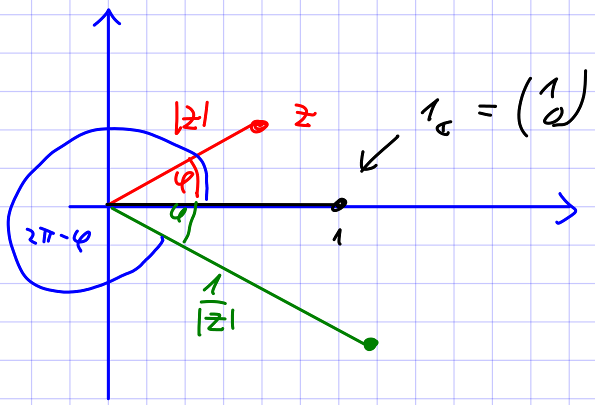
3) Einselement (neutrales Element):

$1_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad : \quad 1_{\mathbb{C}} z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = z = z \cdot 1_{\mathbb{C}}$ ✓

$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

4) Inverses Element

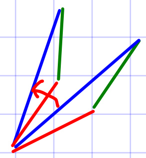
$$z = |z| \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \quad ; \quad z^{-1} \equiv \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix} \quad ✓$$



(→ Menge $\mathbb{C}$ mit kompl. Multiplikation "·" bildet abelsche Gruppe)

Multiplik. und Addition kompl. Zahlen genügen Distributivgesetz

$$v(w+z) \overset{!}{=} vw + vz \quad ✓$$



→ mit komplexen Zahlen kann genauso wie mit reellen Zahlen gerechnet werden!

d.h.: komp. Zahlen mit Add. und Multipl. bilden Körper

Reelle Zahlen als Teilmenge der komp. Zahlen

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

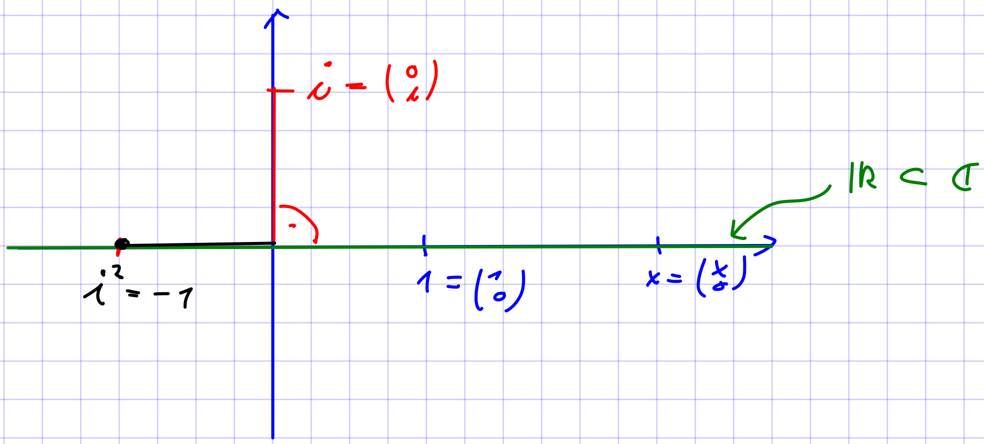
$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ Identifikation:

$$\boxed{\mathbb{R} \ni x \overset{!}{=} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}}$$

- $\mathbb{R} \ni 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}$
- $x \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa \\ xb \end{pmatrix}$



Imaginär Einheit

$$i := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

→ 1) $i^2 = i \cdot i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$

d.h. $|i| = 1$, $i^2 = -1$

2)

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\hat{=} 1} + y \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\hat{=} i} = x + iy$$

$$\boxed{z = x + iy = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

3) $i^2 = -1$ und Distributivgesetz ergibt kompl. Multiplikation:

$$w \cdot z = \underbrace{(a+ib)}_{w}\underbrace{(x+iy)}_{z} = ax + i(bx+ay) + \underbrace{i^2}_{=-1} xy$$

$$= ax - xy + i(bx+ay) = \begin{pmatrix} ax-xy \\ bx+ay \end{pmatrix}$$