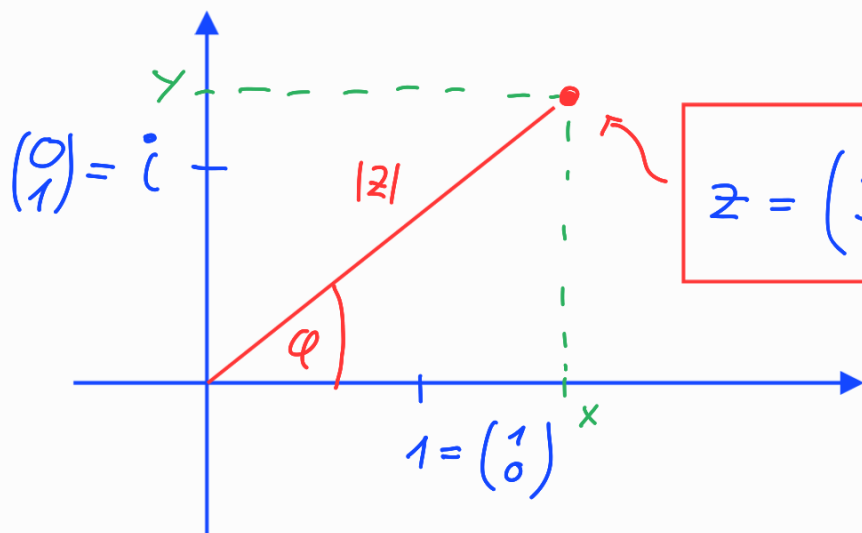


Wdhlg.: komplexe Zahlen $\mathbb{C} \stackrel{!}{=} \mathbb{R}^2$ mit Vektoradd. und Multiplikation:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ ay + bx \end{pmatrix}$$



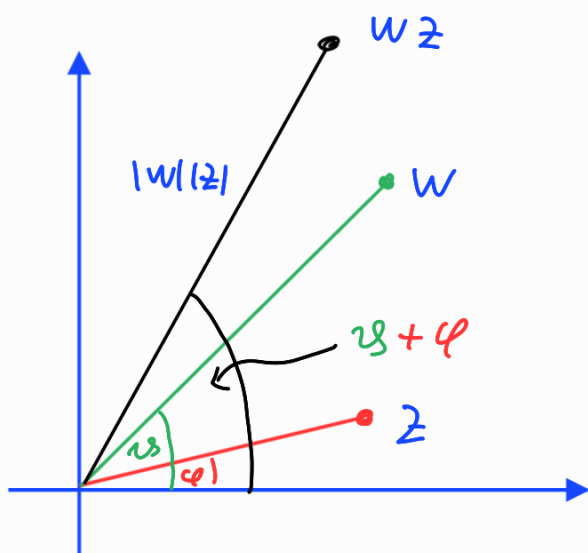
$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = |z| \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = x + iy$$

Realteil: $\operatorname{Re} z = x$

Imaginärteil: $\operatorname{Im} z = y$

Betrag/Modulus: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Argument: $\arg(z) = \varphi$



Multiplikation

$$|wz| = |w| \cdot |z|$$

$$\arg(wz) = \arg(w) + \arg(z)$$

- $\mathbb{R} \ni x \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$

- $1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$i^2 = -1$$

$$\rightarrow z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + iy$$

$$\rightarrow w z = (a + ib)(x + iy)$$

$$= ax + \underbrace{i^2}_{-1} by + i(bx + ay)$$

$$= ax - by + i(ax + by) = \begin{pmatrix} ax - by \\ ax + by \end{pmatrix}$$

$$\Gamma \quad 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \quad z \cdot 1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = z \quad \perp$$

- $i^2 = -1$

d.h. i ist Lösung der Gl. $z^2 = -1$

d.h. $i = \sqrt{-1}$

Komplexe Lösungen algebraischer Gleichungen

Bsp:

$$z^2 + 2z + 3 = 0$$

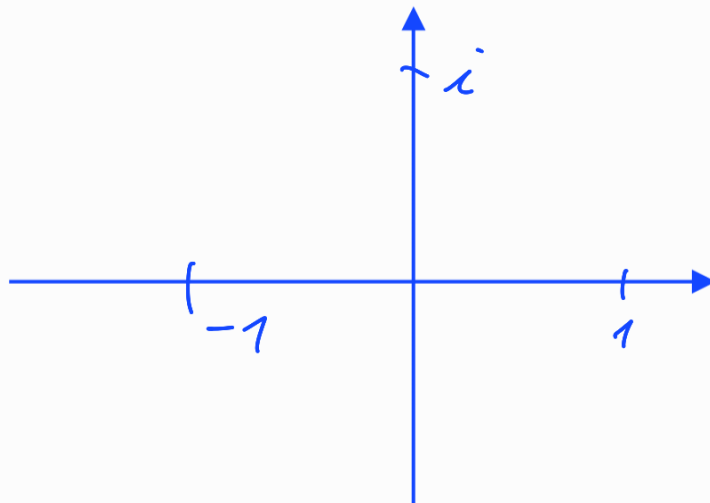
$$\Leftrightarrow (z+1)^2 + 2 = 0$$

$$\rightarrow (z+1)^2 = -2$$

$$\rightarrow z+1 = \pm \sqrt{-2} = \pm \sqrt{2(-1)} = \pm \sqrt{2} \underbrace{\sqrt{-1}}_{\substack{= \\ i}}$$

$$\rightarrow \text{Lösungen } \underline{z_{1/2} = -1 \pm \sqrt{2} i}$$

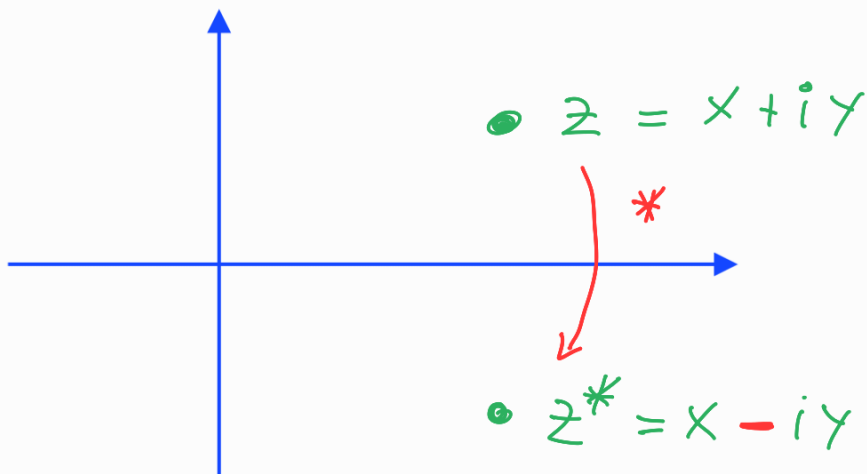
z_1 •



z_2 •

Komplexe Konjugation

$\hat{=}$ Spiegelung an der reellen Achse $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$



kompl. Konjugation:

$$z = x + iy \xrightarrow{*} z^* := x - iy$$

Mathematik: $z^* \equiv \overline{z}$

$\rightarrow$

$$(w + z)^* = w^* + z^*$$

$$(wz)^* = w^* z^*$$

$$(z^*)^* = z$$

$$\left(\frac{1}{z}\right)^* = \frac{1}{z^*}$$

nützliche Beziehungen:

$$\bullet \operatorname{Re} z = \frac{1}{2} (z + z^*)$$

$$\bullet \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i} (z - z^*)$$

$$\bullet |z|^2 = z^* z$$

$$\bullet \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{z^*}{z^*} = \frac{z^*}{|z|^2}$$



┐

$$z^* z = (x - iy)(x + iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2 \quad \perp$$

$$z = \frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{13} \quad \rightarrow \operatorname{Re} z = 2/13$$

$$\operatorname{Im} z = -3/13$$

$$= \frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)}$$

Komplexe Exponentialfunktion

$$e^z = e^{x+iy} = ?$$

Erinnerung:

$$\mathbb{R} \ni x \quad e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad \checkmark$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

$\exp(z)$ z^n $z \in \mathbb{C}$

→ Def: kompl. Exponentialfkt $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$e^z = \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

└ Bem.: jede reelle Fkt. mit Potenzreihenentwicklung
kann auf diese Weise zu einer kompl. Fkt.
verallgemeinert werden]

$$\sin(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} z^{2l+1}, \quad \cos(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l)!} z^{2l}$$

$$\rightarrow ? = e^{x+iy} = e^x \underbrace{e^{iy}}_{?}$$

$$e^{iy} = \exp(iy) \stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (iy)^n$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2l)!} (iy)^{2l} + \frac{1}{(2l+1)!} (iy)^{2l+1} \right\}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{i^{2l}}{(2l)!} y^{2l} + i \sum_{l=0}^{\infty} \frac{i^{2l}}{(2l+1)!} y^{2l+1}$$

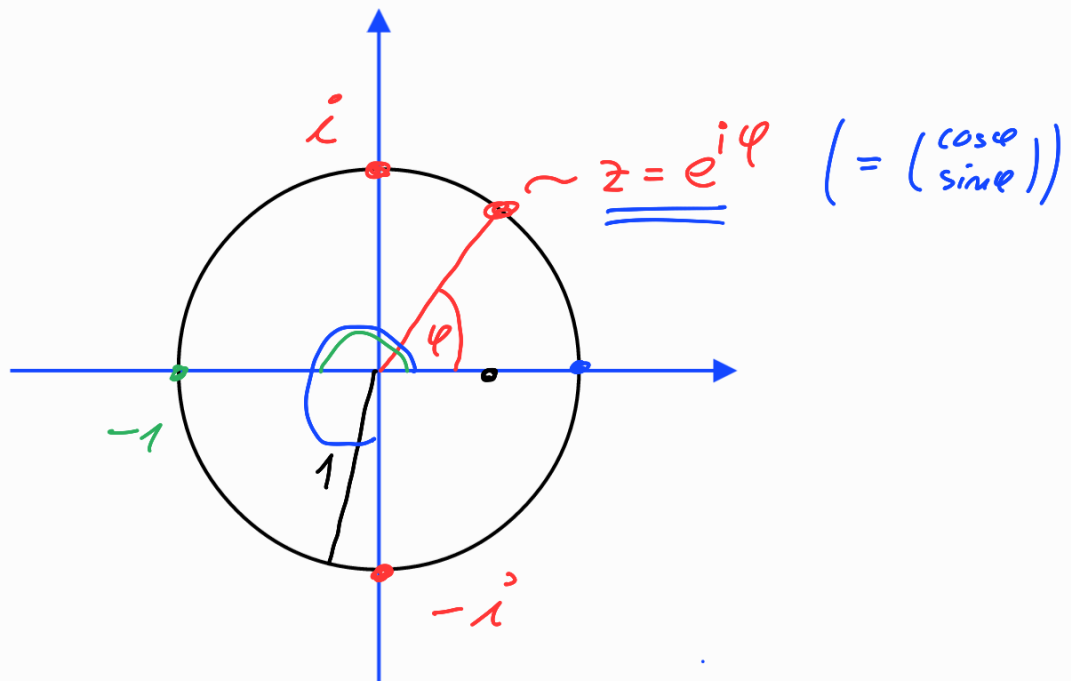
$$= \sum_{l=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^l}{(2l)!} y^{2l}}_{\cos(y)} + i \sum_{l=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^l}{(2l+1)!} y^{2l+1}}_{\sin(y)}$$

$\uparrow$
 $i^{2l} = (i^2)^l = (-1)^l$

$$\text{d.h. } e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

Euler-Identität:

$$\varphi \in \mathbb{R} \quad \boxed{e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$



→ Polarzerstellung: $\underline{z} = |z| \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \underline{|z| e^{i\varphi}}$

Bsp: $i = e^{i\pi/2}, \quad -1 = e^{i\pi}$
 $-i = e^{i3\pi/2}, \quad +1 = e^{i2\pi}$

insb. $e^{i2\pi n} = 1$
 $n \in \mathbb{Z}$

→ $\underline{i \cdot i} = (e^{i\pi/2})^i = e^{i^2\pi/2} = \underline{e^{-\pi/2}}$

Anwendungen: harmonische Schwingung, Freq. ω

$$\mathbb{R} \ni x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

$$= \operatorname{Re}(z e^{i\omega t})$$

mit $z = a - ib$

$$\begin{aligned} \Gamma \quad (a - ib) e^{i\omega t} &= (a - ib)(\cos \omega t + i \sin \omega t) \\ \text{E.I.} \end{aligned}$$

$$= a \cos \omega t + b \sin \omega t + i(\dots)$$

- Additionstheoreme mittels E.I.:

$$\underline{\cos(\alpha + \beta)} + i \underline{\sin(\alpha + \beta)} \stackrel{\text{E.I.}}{=} e^{i(\alpha + \beta)} \stackrel{\text{E.I.}}{=} e^{i\alpha} e^{i\beta} \stackrel{\text{E.I.}}{=}$$

$$= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta)$$

$$= \underline{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} + i(\underline{\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta})$$

$$x(t) = a \cos(\omega t + \varphi)$$

$$= \operatorname{Re} a e^{i(\omega t + \varphi)} = \operatorname{Re}(a e^{i\varphi} e^{i\omega t})$$

Differenzialgleichungen

„Physik“: System im Zustand x_0 zu einer Zeit t_0 , welcher Zustand $x(t)$ liegt zu einer Zeit $t > t_0$ vor?

→ Grundlage: dynamisches Gesetz:

zeitliche Zustandsänderung $\dot{x}$ als

Funktion des Zustands x ! $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$

$$\boxed{\dot{x} = f(x)}$$

(*)

DGL

→ Zustandsbestimmung von $x(t)$ aus

des Anfangszustand x_0 zur Zeit $t = t_0$:

$\Leftrightarrow$ "Anfangswertproblem".

finde eine Funktion $x: [t_0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto x(t)$

derart, dass

(i) $x(t_0) \stackrel{!}{=} x_0$

(ii) $\dot{x}(t) = f(x(t))$ für alle
 $t > t_0$

$\rightarrow x(t)$ ist Lösung der Differenzialgleichung (DGL) (*) zum Anfangswert x_0 bei $t = t_0$.