Wdhlg.: Differenzialgleichungen

Zustand zur Zeit t_0

$$X(t_0) = X_0 \xrightarrow{t} X(t_1) = ?$$

Zustand zur Zeit $t_1 = t_0 + t$

Dynamik:

||

Differenzialgleichung

$$\boxed{\dot{X} = f(X)} \quad (*)$$

→ **Anfangswertproblem:**

finde Funktion $X(t)$ derart, dass

(i) $X(t_0) = X_0$

(ii) $\dot{X}(t) = f(X(t))$ für alle t

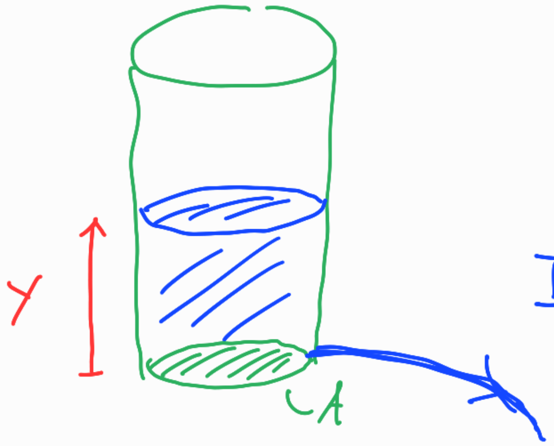
(*): Mechanik: Hamiltonsche Glen. (⟺ Newt.)

Quantenmechanik: Schrödingergleichung

Elektrodynamik: Maxwellsche Gleichungen

⋮

Beispiel: auslaufender Behälter



Volumenstrom

$$I = -\dot{V} = -A\dot{y}$$

Zustand: Füllhöhe y $\rightsquigarrow$ $V = Ay$

→ **Zustandsänderung** $\dot{y} = -\frac{1}{A} I$

- I ist abhängig vom hydrostat. Druck p

$$I(p)$$

- p ist geg. durch Füllhöhe y

$$p(y) = \rho g y$$

→ $$\boxed{\dot{y} = -\frac{1}{A} I(p(y))}$$

Dynamik = Differentialgl. für $y(t)$!

$I(p) = ?$

Fall a) zähe Flüssigkeit: $I = \alpha\, p$

konst., abhängig von Flüssigkeitseigenschaften, Geometrie der Öffnung.

$$\rightsquigarrow \quad \dot{y} = -\frac{1}{A}\,\alpha\, p(y) = \underbrace{-\frac{1}{A}\,\alpha \rho g}_{=: \; a \, > 0} \cdot y$$

$$\boxed{\dot{y} = -a\, y}$$

Fall b) ideale Flüssigkeit: $I = \beta \sqrt{p}$

(z.B. $\approx H_2O$)

$$\rightsquigarrow \quad \dot{y} = -\frac{1}{A}\, I(\underbrace{p(y)}_{\rho g y}) = \underbrace{-\frac{\beta}{A}\sqrt{\rho g}}_{=: \; b} \cdot \sqrt{y}$$

$$\boxed{\dot{y} = -b\sqrt{y}}$$

Wie bestimmen wir Lösung $Y(t)$

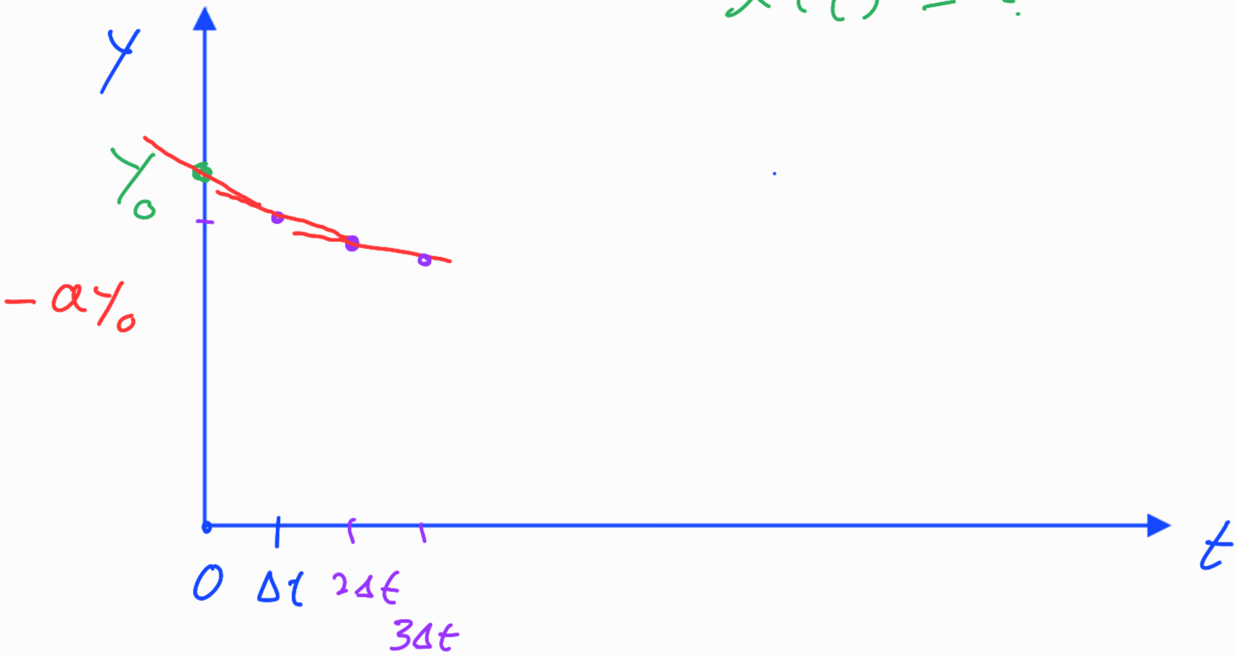
zum Anfangswert Y_0 zur Zeit $t_0 = 0$?

z.B. im Fall a):

$$\dot{Y}(t) = -a\,Y(t)$$

numerisch:

$$X(t) = ?$$



$t=0$: Y_0

$t=\Delta t$: $Y_1 = Y_0 - a Y_0 \cdot \Delta t$

$t=2\Delta t$: $Y_2 = Y_1 - a Y_1 \cdot \Delta t$

$t=3\Delta t$: $Y_3 = Y_2 - a Y_2 \Delta t$

$\vdots$

Euler-Verfahren

konkret: $y_0 = 1$, $a = 1$, $\dot{y} = -y$
$\Delta t = 0.1$

t	n	y_n	e^{-t}
0	0	$y_0 = 1$	1
0.1	1	$y_1 = y_0 - \Delta t\, y_0 = 1 - 0.1 = \underline{\underline{0.9}}$	0.90
0.2	2	$y_2 = 0.9 - 0.09 = 0.81$	0.82
0.3	3	$y_3 = 0.81 - 0.08 = 0.73$	0.74
0.4	4	$y_4 = 0.73 - 0.07 = 0.66$	0.67

⋮

analytisch? naives Verfahren:

rate eine Funktion $y(t)$

und schaue ob es passt!

d.h. (i) $y(t_0) \overset{!}{=} y_0$

(ii) $\dot{y}(t) = f(y(t))$

hier: $\dot{y}(t) = -a\,y(t)$; $y(0) = y_0$

↳ Exponentialfunktion

$$y(t) = y_0\, e^{-at}$$

ist Lösung der DGL zum AW. y_0 bei $t=0$!

⌈ denn: (i) $y(0) = y_0\, e^{-0} = y_0$ ✓

(ii) $\dot{y}(t) = -a\, \underbrace{y_0\, e^{-at}}_{\hat{=}\, y(t)} = -a\,y(t)$ ✓ ⌋

für $y_0 \hat{=} 1$, $a = 1$: $y(t) = e^{-t}$.

Def.:

Eine spezielle Lösung einer Differenzial-gleichung (DGL)

$$\dot{y} = f(y, t)$$

zum Anfangswert y_0 bei $t = t_0$ ist eine Funktion $y(t)$ mit den Eigenschaften

(i) $y(t_0) \overset{!}{=} y_0$

(ii) $\dot{y}(t) \overset{!}{=} f(y(t), t)$ für alle t

Eine allgemeine Lösung ist eine Funktion $y_c(t)$ die Bedingung (ii) genügt und einen freien Parameter enthält

Def.:

Eine spezielle Lösung einer Differenzialgleichung (DGL)

$$y' = f(y, x)$$

zum Anfangswert y_0 bei $x = x_0$ ist eine Funktion $y(x)$ mit den Eigenschaften

(i) $\quad y(x_0) \overset{!}{=} y_0$

(ii) $\quad y'(x) \overset{!}{=} f(y(x), x)$ für alle x

Eine allgemeine Lösung ist eine Funktion $y_c(x)$ die Bedingung (ii) genügt und einen freien Parameter enthält

Lösungen und Lösungsverfahren für gewisse Typen von DGLen

1) triviale DGL: $y' = f(\cancel{y}, x)$

$\rightarrow \quad y'(x) = f(x)$

$\rightarrow$ allg. Lösung $\quad y_c(x) = \int_{x_0}^{x} f(u)\,du + c$

⌜Test:

$$y_c'(x) = f(x) \quad ✓$$ ⌟

spez. Lsg. zum AW y_0 bei $x = x_0$:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(u)\,du + y_0$$

2) homogene lineare DGL:

a) mit konstanten Koeffizienten:

$$y' = a\,y$$

$\rightarrow$ allg. Lsg $\quad y_c(x) = c\,e^{ax}$ ✓

$\rightarrow$ spez. Lsg. zum AW y_0 bei $x = x_0$

$$y(x) = y_0\,e^{a(x-x_0)}$$ ✓

b) mit x-abhängigen Koeffizienten:

$$y'(x) = g(x)\;y(x)$$

allg. Lsg.:

Stammfkt. zu g

Γ Ansatz: $\quad y(x) = c\,e^{G(x)}$

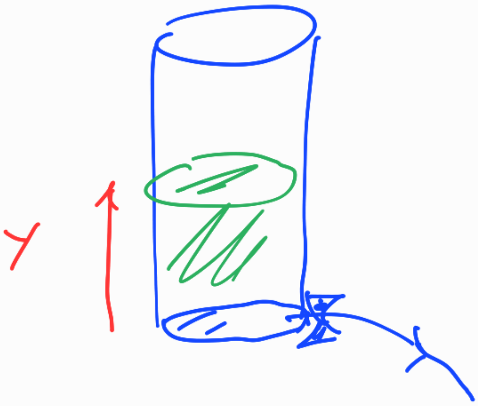
$$\rightarrow\; y'(x) = c\,\underbrace{G'(x)}_{=g(x)}\,e^{G(x)} = g(x)\,\underbrace{c\,e^{G(x)}}_{=y(x)}$$ ✓

d.h. $\boxed{y(x) = c\,e^{\int_{x_0}^{x} g(u)\,du}}$

spezielle Lsg. zum AW y_0 bei $x=x_0$:

$$\boxed{y(x) = y_0\, e^{\int_{x_0}^{x} g(u)\,du}}$$

<u>Beispiel</u>:



$$I = \alpha p \cdot (1+\cos\omega t)$$

$\hookrightarrow \rho g y$

$$= -\dot V = -A \dot y$$

$$\to \quad \dot y = -\underbrace{\frac{\alpha \rho g}{A}}_{=a} (1+\cos\omega t)\, y$$

$$\boxed{\dot y(t) = -\underbrace{a(1+\cos(\omega t))}_{g(t)}\, y(t)}$$

$t_0 = 0$, y_0

$$-a\int_0^t (1+\cos(\omega\tau))\,d\tau = -at - a\,\frac{\sin\omega\tau}{\omega}\Big|_0^t$$

$$\to \quad -a\int_0^t (1+\cos(\omega\tau))\,d\tau$$

$$= -at - \frac{a}{\omega}\sin(\omega t)$$

$$\to \quad y(t) = y_0\, e^{-at - \frac{a}{\omega}\sin(\omega t)}$$

$$= y_0\, e^{-at}\, e^{-\frac{a}{\omega}\sin(\omega t)}$$

3. inhomogene lineare DGL:

$$y'(x) = g(x)\,y(x) + \underline{\underline{b}}$$

inhomogenität!

$\to$ allg. Lsg:

$$y_c(x) = y_c^h(x) + y_s(x)$$

mit $y_c^h(x)$ allg. Lsg. der homogenen DGL

$$y' = g(x)\,y$$

und $y_s(x)$ spezielle Lsg. der inhomog. DGL

$$y' = g(x)\,y + b$$

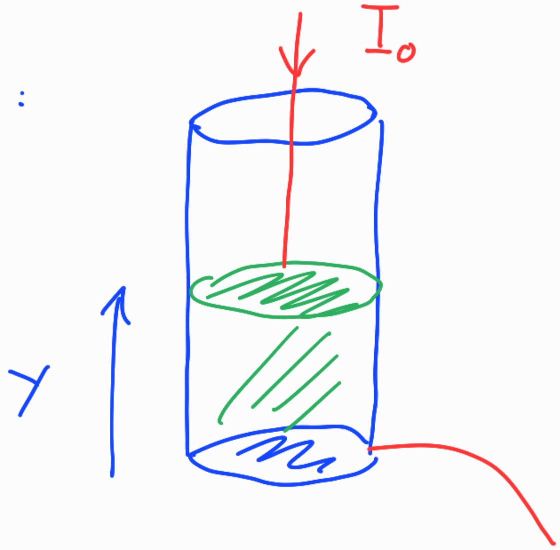
Test:

$y_c(x) = y_c^h(x) + y_s(x)$ erfüllt inhomogene DGL ?

$$y_c'(x) = \underbrace{(y_c^h)'(x)}_{=\, g(x)\, y_c^h(x)} + \underbrace{y_s'(x)}_{=\, g(x)\, y_s(x) + b}$$

$$= g(x)\underbrace{\left(y_c^h(x) + y_s(x)\right)}_{y_c(x)} + b$$

Bsp.:



$$I(p) = \alpha p$$
$$= \alpha \varrho g y$$

$$A\dot{y} = \frac{dV}{dt} = \dot{V} = -I(p) + I_0$$

$$\dot{y} = -\underbrace{\frac{\alpha \varrho g}{A}}_{a} \cdot y + \underbrace{\frac{1}{A}}_{b} I_0$$

$$\rightarrow \boxed{\dot{y} = -ay + b}$$