DGL:

$$\boxed{y' = f(y,x)}$$

- spezielle Lsg. zum Anfangswert y_0 bei x_0

  = Funktion $y(x)$ mit

  (i) $y(x_0) = y_0$

  (ii) $y'(x) = f(y(x), x)$ für alle x

- allgemeine Lsg. = Funktion $y_c(x)$ mit frei wählb. Parameter c und

  $y_c'(x) = f(y_c(x), x)$ für alle x

DGL-Typen

1) triviale DGL: $y' = f(x)$

$$\to \quad y(x) = \int_{x_0}^{x} f(u)\,du + y_0$$

2) homogene lineare DGL

a) mit konstantem Koeff.:

$$\boxed{y' = a y}$$

$\to$ • $y(x) = y_0\, e^{a(x-x_0)}$

• $y_c(x) = c\, e^{ax}$

b) mit x-abhängigen Koeff.:

$$\boxed{y' = g(x)\, y}$$

$\rightarrow$ • $y(x) = y_0\, e^{\int_{x_0}^{x} g(u)\, du}$

• $y_c(x) = c\, e^{\int^{x} g(u)\, du}$

3) <u>inhomogene lineare DGL</u>:

$$\boxed{y' = g(x)\, y + b(x)} \qquad (*)$$

Inhomogenität

$\rightarrow$ <u>allg. Lsg.</u>:

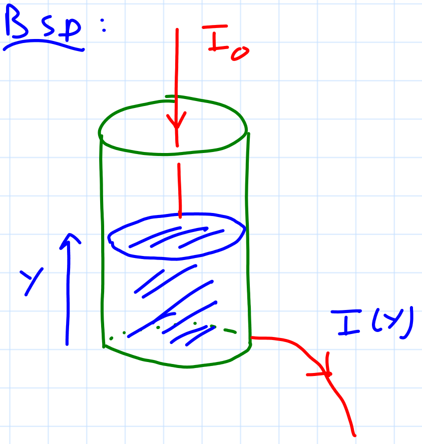
$$y_c(x) = y_c^h(x) + y_s(x)$$

mit

• $y_c^h(x)$ <u>allg.</u> Lsg. der <u>homogenen</u> DGL
$y' = g(x)\, y$ (nach 2b)

• $y_s(x)$ <u>spezielle Lsg.</u> der <u>inhomog</u>. DGL (*)

<u>Bsp</u>:



$I(y) = \alpha\, \rho\, g\, y$

$\dot V = -I(y) + I_0$

$\dot V = A\dot y$

$\rightarrow \boxed{\dot y = -a\, y + b}$

$b = I_0/A$

$a = \alpha \rho g / A$

$$\boxed{\dot{y} = -ay + b}$$

2) allg. Lsg. der homog. DGL $\dot{y} = -ay$:

$$\rightarrow \quad y_c^h(t) = c\, e^{-at}$$

spezielle Lsg. der inhomogen DGL $\dot{y} = -ay + b$:

$$y_s(t) = b/a$$

$\rightarrow$ allg Lsg. der inhomog. DGL $\dot{y} = -ay + b$:

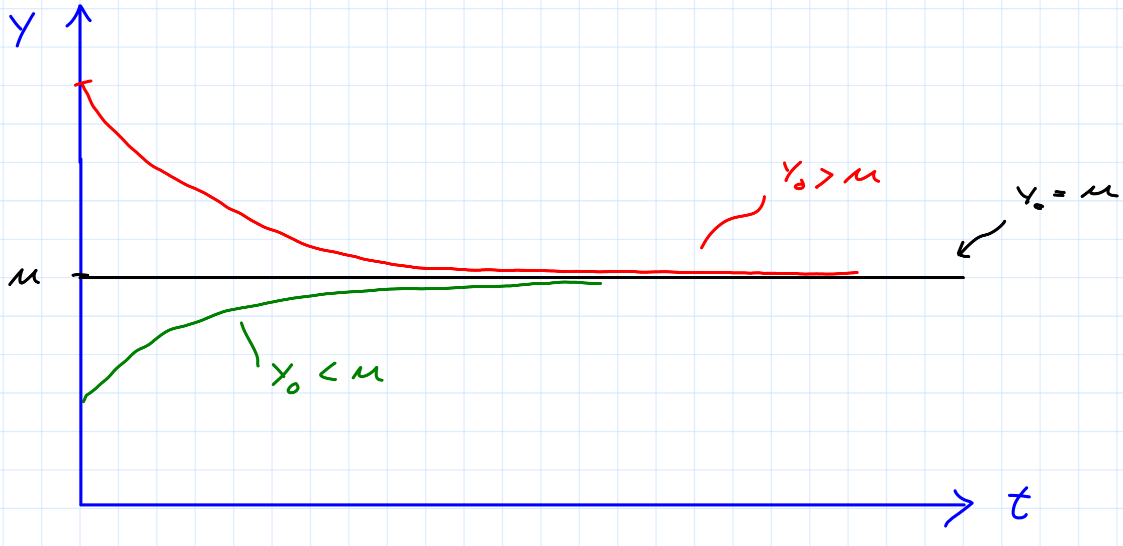
$$y_c(t) = y_c^h(t) + y_s(t)$$

$$= c\, e^{-at} + b/a \xrightarrow{t \to \infty} b/a =: \mu$$

$$\boxed{y_c(t) = c\, e^{-at} + \mu}$$

$\rightarrow$ spez. Lsg zum AW y_0 bei $t = 0$:

$$\boxed{y(t) = (y_0 - \mu)\, e^{-at} + \mu}$$



4) Separierbare DGL:

$$\boxed{y' = g(x)\, f(y)}$$

Bestimmung der spez. Lsg. $\boxed{y(x)}$ zum AW $\boxed{y_0}$ bei x_0:

$$\boxed{\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dy}{f(y)} = \int_{x_0}^{x} g(\tilde{x})\, d\tilde{x}}$$

(i) berechne beide Integrale

(ii) löse nach $y(x)$ auf

Merkschema:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\, f(y) \qquad \Big| \; : f(y),\ \cdot dx$$

$$\frac{dy}{f(y)} = g(x)\, dx \qquad \text{integriere}$$

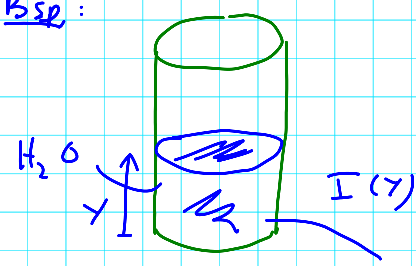
$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dy}{f(y)} = \int_{x_0}^{x} g(\tilde{x})\, d\tilde{x} \quad \checkmark$$

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dy}{f(y)} \overset{!}{=} \int_{x_0}^{x} g(\tilde{x})\, d\tilde{x} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \frac{1}{f(y(x))} \cdot y'(x) \overset{!}{=} g(x)$$

d.h. $y'(x) = g(x)\, f(y(x))$ ✓

$x = x_0 \rightarrow y(x_0) = y_0$ ✓

Bsp:



auslaufende ideale Flüssigkeit

$$I(p) = \beta \sqrt{p}$$

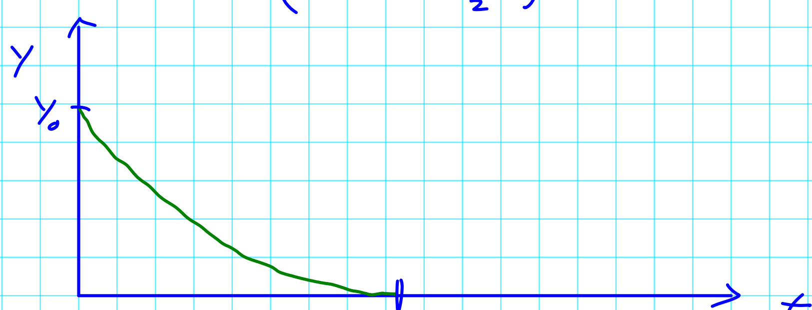
$$\rightarrow \quad \boxed{\dot{y} = -b\sqrt{y}}$$

d.h. $\frac{dy}{dt} = \dot{y} = \underbrace{-b}_{g(t)} \underbrace{\sqrt{y}}_{f(y)}$ $\qquad y(0) = y_0$, $\quad t_0 = 0$

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\underbrace{\int_0^t b \, d\tilde{t}}_{\shortparallel}$$

$$2\left(\sqrt{y(t)} - \sqrt{y_0}\right) = 2\sqrt{y}\,\Big|_{y_0}^{y(t)} = -b\,t$$

$$\rightarrow \quad y(t) = \left(\sqrt{y_0} - \frac{b}{2}t\right)^2$$



$$t_1 = \frac{2\sqrt{y_0}}{b}$$

Test: $\dot{y}(t) = \cancel{2}\,(\underbrace{\sqrt{y_0} - \frac{b t}{2}}_{= \sqrt{y(t)}})\left(-\frac{b}{\cancel{2}}\right) = -b\sqrt{y(t)}$ ✓

bisherige DGL-en:

$$y' = f(y, x)$$

1. Abl. $y'(x)$ und $y(x)$, x

↑ DGL 1. Ordnung

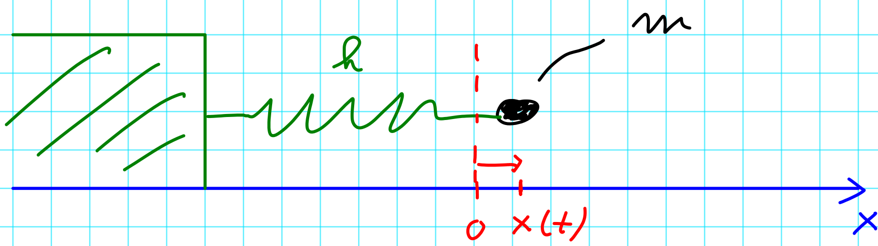
DGL n-ter Ordnung:

$$y^{(n)} = f(y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, x)$$

hier ausführlich: lineare DGL 2. Ordnung

am Beispiel des

Harmonischer Oszillator (mit Dämpfung)



Federkraft: $F(x) = -kx$

↑ Federkonstante

Reibungskraft: $F_R(\dot{x}) = -\gamma m \dot{x}$

↑ Dämpfungskonst.

Newton: $m\ddot{x} = -kx - \gamma m \dot{x}$

$$\rightarrow \boxed{\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0}$$

↑ lineare DGL 2. Ordnung

→ Bahn $x(t)$!

$$\boxed{\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0}$$

physikalisch: bestimme Bahn $x(t)$ zu Anfangsort x_0 und Anfangsgeschwindigkeit v_0 zur Zeit t_0

mathematisch: bestimme Funktion $x(t)$ derart, dass

(i) $x(t_0) = x_0$

(ii) $\dot{x}(t_0) = v_0$

(iii) $\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + \frac{k}{m} x(t) \overset{!}{=} 0$

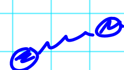
zu allen Zeiten t

harmonische Oszillator = beschreibt "kleine" Schwingungen um eine stabile Gleichgewichtslage, z.B. in

Mechanik, Elektrotechnik, Molekülphysik, Atomkerne

$\downarrow$

Schwingkreis



Hohlraumstrahlung

$$\Rightarrow \quad \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \overset{!}{=} \langle E_\nu \rangle_T \quad !$$

$$\boxed{\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0} \quad (*)$$

Lösungen der DGL (*)

1) ungedämpfter harm. Oszillator: $\gamma = 0$:

$$\longrightarrow \quad \ddot{x}(t) = -\boxed{\frac{k}{m}}\, x(t)$$

Lösungen?

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 \cos(\omega_0 t) \\ x_2(t) &= c_2 \sin(\omega_0 t) \end{aligned}}$$

$$\rightarrow \quad \ddot{x}_1(t) = -\omega_0^2 \underbrace{c_1 \cos(\omega_0 t)}_{x_1(t)} = -\boxed{\omega_0^2}\, x_1(t)$$

$\rightarrow$ $x_{1/2}(t)$ mit $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ist Lsg. der DGL (*)

$$\ddot{x}_2(t) = -\omega_0^2 c_2 \sin(\omega t) = -\omega_0^2 x_2(t) \quad \checkmark$$

$\rightarrow$ allg. Lsg. mit zwei unabhängigen Parametern:

$$\boxed{x(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t)}$$

$\rightarrow$ spez. Lsg zu Anfangsort x_0 und -gesch. v_0 bei $t=0$:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \quad \checkmark$$

Lösungen für $\gamma \geq 0$:

DGL: $\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $\quad k/m = \omega_0^2$

Exponentialansatz $\quad x(t) = e^{\lambda t}$

einsetzen in DGL: $\quad \dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}$

$\ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \gamma \lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2)}_{\overset{!}{=} 0} \underbrace{e^{\lambda t}}_{\neq 0} \overset{!}{=} 0 \quad \text{für alle } t!$$

$\rightarrow$ $x(t) = e^{\lambda t}$ ist Lösung der DGL (*)

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\lambda^2 + \gamma \lambda + \omega_0^2 \overset{!}{=} 0}$$

Nullstellen: $\quad \Leftrightarrow \quad (\lambda + \gamma/2)^2 = \frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2$

$$\rightarrow \quad \lambda_{1/2} = -\gamma/2 \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$$