Wdhlg. harmonischer Oszillator

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}\, x \qquad (\gamma = 0)$$

lineare DGL 2. Ordnung

→ spezielle Lsg en

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= \cos(\omega_0 t) \\ x_2(t) &= \sin(\omega_0 t) \end{aligned}}$$

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$

Superposition zu allgemeiner Lsg.:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \alpha_1\, x_1(t) + \alpha_2\, x_2(t) \\ &= \alpha_1 \cos(\omega_0 t) + \alpha_2 \sin(\omega_0 t) \end{aligned}}$$

→ Lsg. $x(t)$ zu Anfangsort x_0 und -geschw. v_0 bei $t=0$:

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)}$$

gedämpfter harmonischer Oszillator:

→ $\gamma > 0$

$$\boxed{\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$

Lösungen mittels Exponentialansatz: $\boxed{x(t) = e^{\lambda t}}$

$\xrightarrow{\text{DGL}}$ Bestimmungsgl. für λ: $\boxed{\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 \overset{!}{=} 0}$

$$\rightarrow \quad \boxed{\lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}}$$

→ Fallunterscheidung:

a) starke Dämpfung: $\gamma > 2\omega_0$ $\rightarrow \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} \in \mathbb{R}$

b) schwache Dämpfung: $\gamma < 2\omega_0$ $\rightarrow \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} \in \mathbb{C}$

c) Grenzfall: $\gamma = \omega_0$ $\rightarrow \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} = 0$

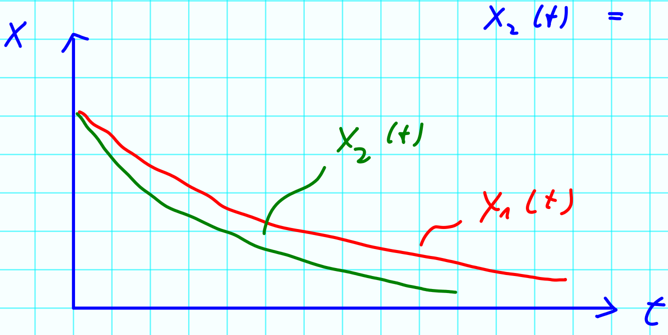
a) Starke Dämpfung:

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} \in \mathbb{R} \; !$$

$\rightarrow \quad \lambda_2 < \lambda_1 < 0$

$\rightarrow$ spezielle Lsgen

$$x_1(t) = e^{-|\lambda_1| t}$$
$$x_2(t) = e^{-|\lambda_2| t}$$



$\rightarrow$ allg. Lsg.:

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$
$$= c_1 e^{-|\lambda_1| t} + c_2 e^{-|\lambda_2| t}$$

✓

b) Schwache Dämpfung: $\gamma < 2\omega_0$

$$\rightarrow \lambda_{1/2} = -\gamma/2 \pm \sqrt{-(\underbrace{\omega_0^2 - \gamma^2/4}_{>0})}$$

$$= -\gamma/2 \pm i\,\omega \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$$

$\rightarrow$ spezielle komplexe Lösungen:

?!

$$z_+(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{-\frac{\gamma}{2} t + i\omega t} = e^{-\frac{\gamma}{2} t} e^{i\omega t}$$

$$z_-(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{-\frac{\gamma}{2} t - i\omega t} = e^{-\frac{\gamma}{2} t} e^{-i\omega t}$$

Real- und Imaginärteil der komplexen Lsgen $z_\pm(t)$ sind ebenfalls Lösungen der DGL! (*)

z.B. $$\underline{\underline{x_1(t)}} := \underline{\underline{\mathrm{Re}\, z_+(t)}} = \mathrm{Re}\, e^{-\frac{\gamma}{2} t} e^{i\omega t} \underset{\text{Euler Id}}{=} e^{-\frac{\gamma}{2} t} \cos(\omega t)$$

$$x_2(t) := \mathrm{Im}\, z_+(t) = \mathrm{Im}(\;"\quad"\;) = e^{-\frac{\gamma}{2} t} \sin(\omega t)$$

⌈ $$x_2(t) = e^{-\gamma t/2}\, \mathrm{Im}(e^{i\omega t})$$

$$\underset{\text{E.Id.}}{=} e^{-\gamma t/2}\, \underbrace{\mathrm{Im}(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))}_{= \sin(\omega t)}$$

$$\mathrm{Im}(a + i\underline{b}) := \underline{b}$$ ⌋

⌈ (*) $$\mathrm{Re}(\ddot{z}_+ + \gamma \dot{z}_+ + \omega_0^2 \underline{z_+}) = 0$$

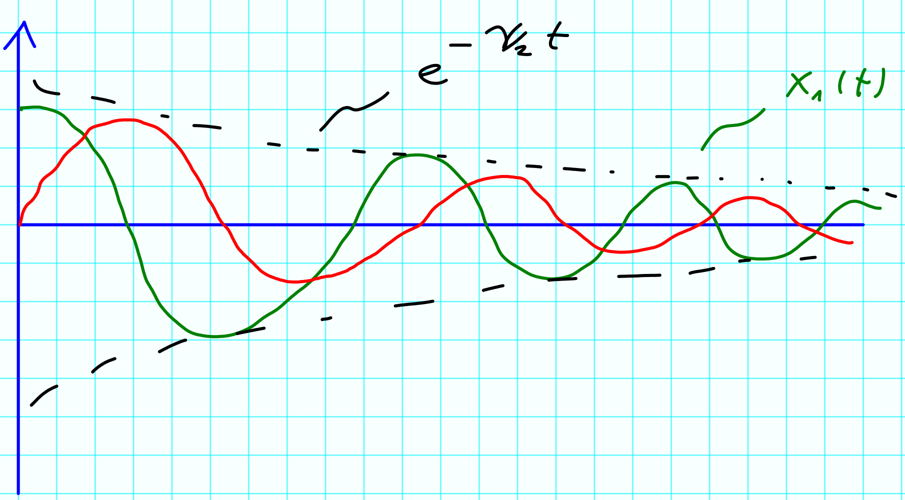
! $\mathbb{R} \ni \underline{\gamma,\ \omega_0^2}$

$$\mathrm{Re}\, \ddot{z}_+ + \gamma\, \mathrm{Re}\, \dot{z}_+ + \omega_0^2\, \mathrm{Re}\, z_+ = 0$$

$$\underbrace{\ddot{\overline{\mathrm{Re}\, z_+}}}_{= \ddot{x}_1} + \gamma\, \underbrace{\dot{\overline{\mathrm{Re}\, z_+}}}_{= \dot{x}_1} + \omega_0^2\, \underbrace{\mathrm{Re}\, z_+}_{= x_1} = 0$$

$$\ddot{x}_1 + \gamma \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = 0$$ ✓

analog: $x_2 = \mathrm{Im}\, z_+$ ist Lsg ✓ ⌋



$\rightarrow$ allg. Lsg.: $\quad X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t)$

$$X(t) = \underline{\underline{e^{-\gamma/2\, t}}} \big(\underbrace{c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)} \big)$$

$\underline{\underline{\gamma < 2\omega_0}}$

„Schwingfall" $\quad$ Dämpfung $\quad$ harmonische Schwingung mit verminderter Freq.

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4} < \omega_0$$

c) Grenzfall $\gamma = 2\omega_0 \rightarrow \sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2} = 0$

$\rightarrow$ nur <u>eine</u> Nullstelle $\lambda = -\gamma/2$

$\rightarrow$ eine spez. Lsg $\quad x_1(t) = e^{-\gamma t/2}$ ✓

<u>Problem</u>: finde zweite spez. Lsg. $x_2(t) \neq c_1 x_1(t)$

$\hookrightarrow$ betrachte Schwingfall-Lsgen $x_1(t)$, $x_2(t)$ im Grenzfall $\gamma \rightarrow 2\omega_0$: $\rightarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4} \rightarrow 0$

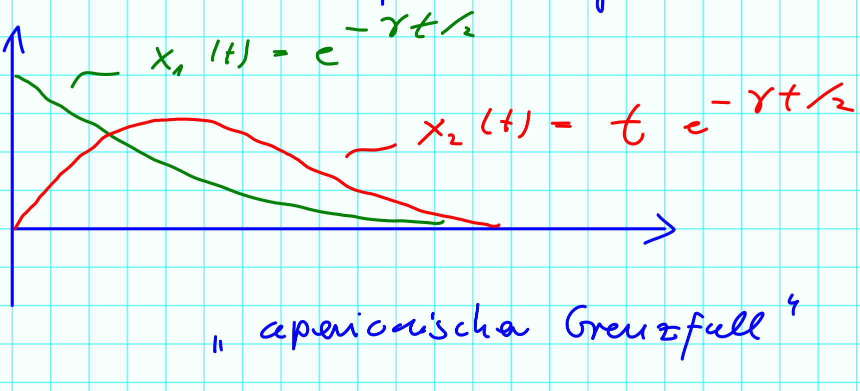
$$x_1(t) = e^{-\gamma t/2} \cos(\omega t) \xrightarrow{\omega \to 0} e^{-\gamma t/2}$$

$$x_2(t) = e^{-\gamma t/2} \underbrace{\sin(\omega t)}_{= \omega t - \frac{1}{6}(\omega t)^3 + \dots} \xrightarrow[\omega t \ll 1]{} \omega t\, e^{-\gamma t/2}$$

$$\left(\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + \dots \right)$$

$$\rightarrow x_2(t) = \underline{\underline{t}}\, e^{-\gamma t/2} \quad ?\,!$$

ist tatsächlich ebenfalls Lsg. der DGL!



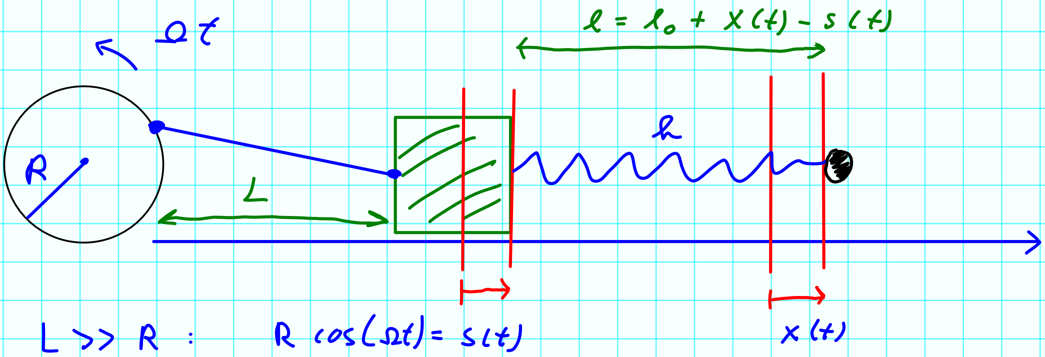
„aperiodischer Grenzfall"

Resonanz

im Modell eines gedämpften harm. Oszillators mit <u>periodischer externer Kraft</u>

$$\boxed{F_{ex}(t) = F_0 \cos(\Omega t)}$$

Stärke   ext. Frequenz



$L \gg R$: $R\cos(\Omega t) = s(t)$

$\to$ Federkraft: $\quad F(x) = -k\,(x - s(t))$

$$= -k\,(x - R\cos(\Omega t))$$

$$= -kx + \underbrace{kR\cos(\Omega t)}_{F_{ex}(t) = F_0\cos(\Omega t)}$$

Newton: $\quad m\ddot{x} = -kx - \gamma m \dot{x} + F_{ex}(t)$

$\hookrightarrow \quad \ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 = f\cos(\Omega t)$

$f = F_0/m$

$\rightarrow$ $$\boxed{\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos(\Omega t)} \quad (*)$$

DGL 2. Ord., linear, inhomogen !

$\rightarrow$ allg. Lsg. $x(t) = x_h(t) + x_s(t)$

mit $x_h(t)$ allg. Lsg. der homogenen DGL

$(\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0)$ wie oben;

$x_s(t)$: spez. Lösung der inhomog. DGL

Bestimmung einer spez. Lsg. :

1. Idee : rechne komplex !

betrachte Lsg. $z(t)$ der DGL :

$$\boxed{\ddot{z} + \gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = f e^{i\Omega t}}$$

$\rightarrow$ $x(t) = \mathrm{Re}(z)$ ist Lsg der DGL

Re

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos(\Omega t)$$

$\leftarrow$ DGL $(*)$!

2. Idee : geeigneter Ansatz für $z(t)$:

- Frequenz Ω — $e^{i\Omega t}$
- Amplitude A
- Phasenverschiebung φ

$\left.\right\}$ $a = A e^{i\varphi}$

$\cos(\Omega t) \longrightarrow x(t) = A \cos(\Omega t + \varphi)$

Re

Ansatz $z(t) = a e^{i\Omega t}$

$$z(t) = a\, e^{i\Omega t}$$

$$\dot z(t) = i\Omega\, a\, e^{i\Omega t} = i\Omega\, z(t)$$

$$\ddot z(t) = -\Omega^2\, a\, e^{i\Omega t} = -\Omega^2 z(t)$$

eingesetzt in DGL $\ddot z + \gamma \dot z + \omega_0^2 z = f\, e^{i\Omega t}$

ergibt:

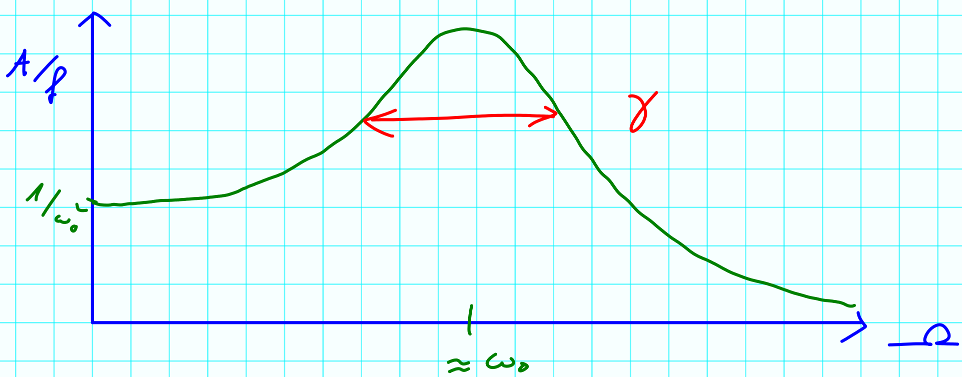
$$(-\Omega^2 + i\gamma\Omega + \omega_0^2)\, a = f$$

$$\to \quad a = \frac{f}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i\gamma\Omega} \qquad a = A\, e^{i\varphi}$$

→ Amplitude der erzwungenen Schwingung:

$$A = |a| = \frac{f}{|\omega_0^2 - \Omega^2 + i\gamma\Omega|}$$

$$\boxed{A/f = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2}}}$$



Phasenverschiebung:

$$-\varphi = -\arg a = +\arg(\omega_0^2 - \Omega^2 + i\gamma\Omega)$$

$$= \arctan \frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \; .$$