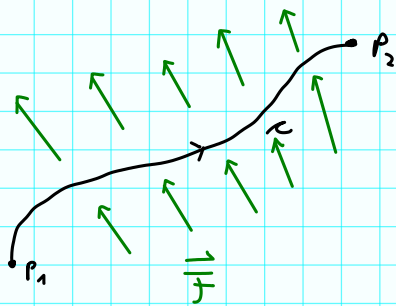


Vektoranalysis

Weg, Wegintegral, Vektorfeld

Motivation:



Teilchen wird im Kraftfeld $\vec{F}$ längs eines Weges γ von P_1 nach P_2 bewegt, welche Arbeit A wird dazu benötigt?

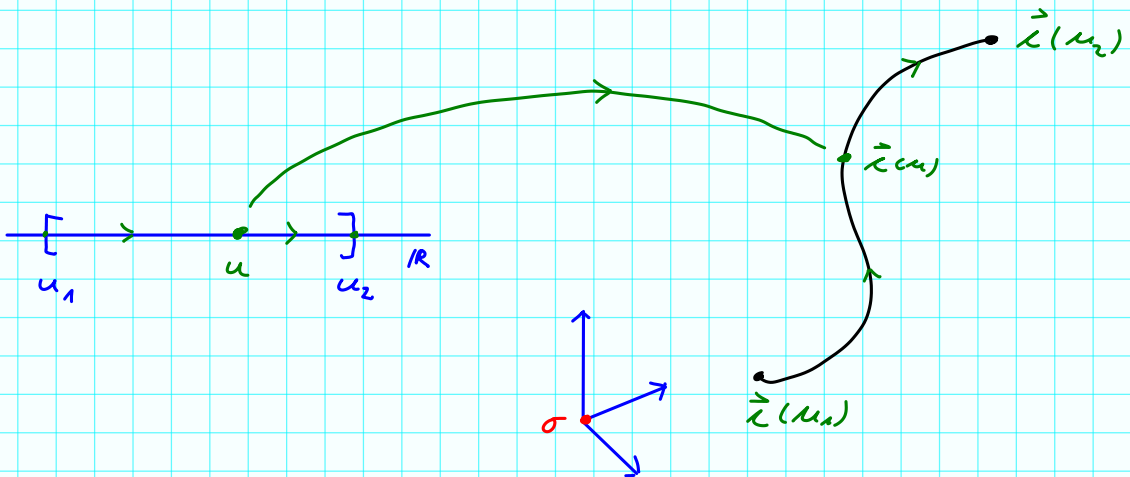
$$A = - \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{x} = ?$$

Wegintegral

Weg γ im $\mathbb{R}^3$:

gegeben durch Parametrisierung

$$= \text{Abbildung } \gamma : [u_1, u_2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$u \longmapsto \vec{x}(u)$$



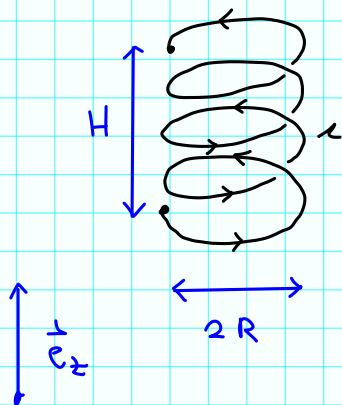
Beispiele:

1) "Schraubenweg":

n Windungen

Radius R

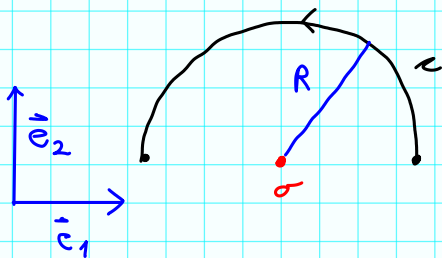
Höhe H



$$\hat{=} \gamma : [0, 2\pi n] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$u \mapsto \vec{\gamma}(u) = \begin{pmatrix} R \cos u \\ R \sin u \\ \frac{H}{2\pi n} \cdot u \end{pmatrix}$$

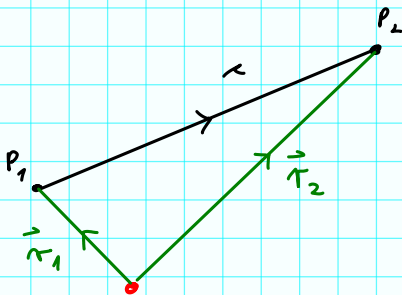
2) Kreisbogen:



$$\hat{=} \gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$u \mapsto \vec{\gamma}(u) = R \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}$$

3) gerade Strecke:



$$\hat{=} \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$u \mapsto \vec{r}_1 + u(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Vektorfeld = Abb. $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

(z.B. Kraftfeld

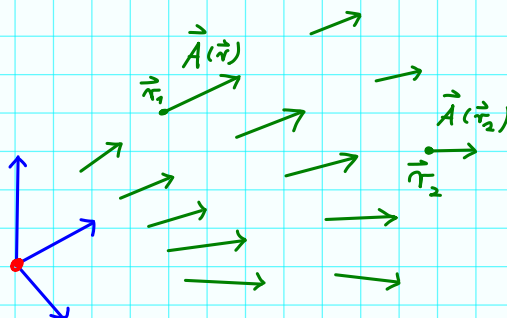
elekt. Feld

Magnetfeld

Stromdichte

⋮

)

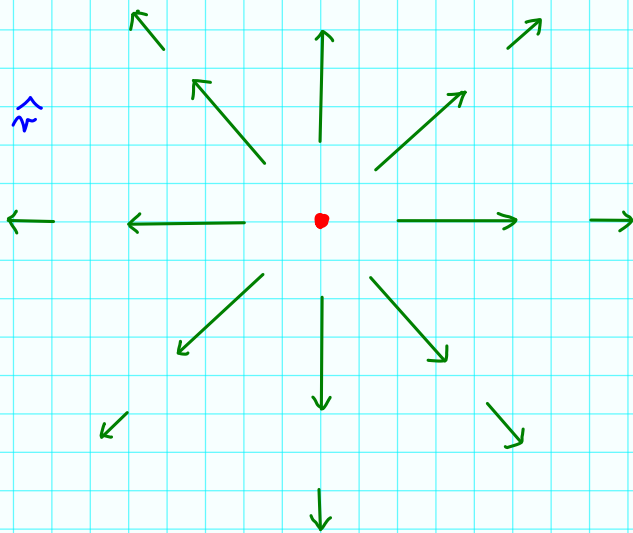


Beispiele:

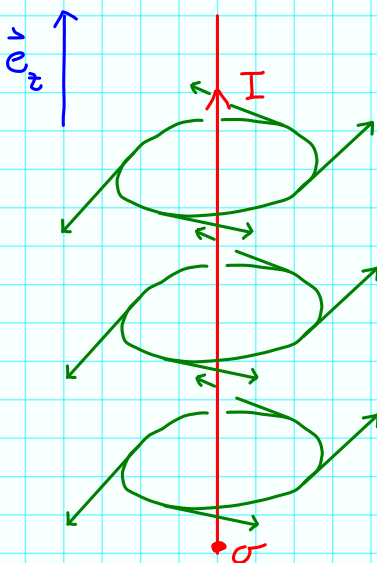
1) Elektrisches Feld einer Punktladung q in σ :

$$\vec{E} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{r} \mapsto \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \hat{r}$$



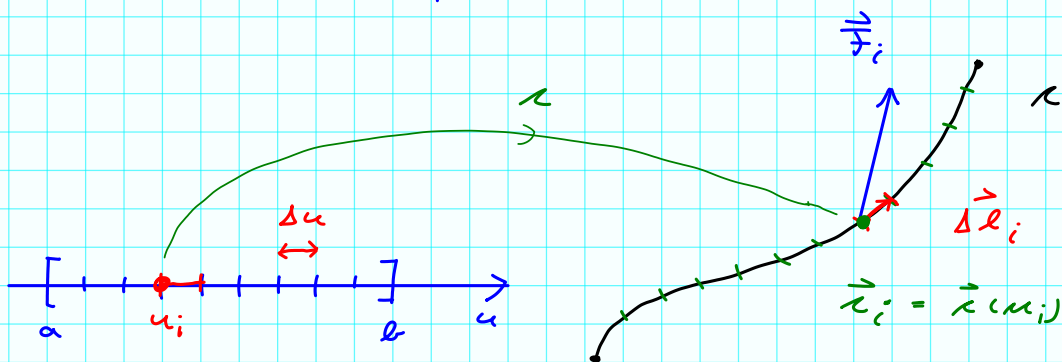
2) Magnetfeld eines Strom I führenden Drahts:



$$\vec{B} : (s, \varphi, z) \mapsto \vec{B}(s, \varphi, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \vec{e}_\varphi$$

Zur Definition des Wegintegrals über ein Vektorfeld betrachten wir

Arbeit im Kraftfeld:



Arbeit längs Wegstück $\Delta \vec{r}_i$:

$$\Delta A_i = - \langle \vec{F}_i, \Delta \vec{r}_i \rangle$$

→ Arbeit längs des gesamten Wegs κ :

$$A = \sum_i \Delta A_i = - \sum_i \langle \vec{F}_i, \Delta \vec{r}_i \rangle$$

mit $\vec{F}_i = \vec{F}(\vec{r}(u_i))$

$$\Delta \vec{r}_i = \vec{r}(u_i + \Delta u) - \vec{r}(u_i) = \vec{r}'(u_i) \Delta u$$

$\uparrow$
 $\Delta u \rightarrow 0$

folgt

$$A = - \sum_i \langle \vec{F}(\vec{r}(u_i)), \vec{r}'(u_i) \rangle \Delta u$$

$$\xrightarrow{\Delta u \rightarrow 0} - \int_a^b \langle \vec{F}(\vec{r}(u)), \vec{r}'(u) \rangle du$$

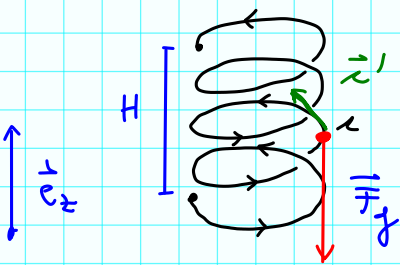


Def.: Wegintegral eines Vektorfelds $\vec{A}$ längs eines Wegs γ :

$$\int_{\gamma} \vec{A} d\vec{\ell} := \int_{u_1}^{u_2} \langle \vec{A}(\vec{\gamma}(u)), \vec{\gamma}'(u) \rangle du,$$

wobei $\gamma: [u_1, u_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung des Weg γ ist.

Beispiel: Arbeit im Schwerfeld $\vec{F} = -mg\vec{e}_z =$
längs Schraubenweg:



$$\gamma: [0, 2\pi n] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$u \mapsto \vec{\gamma}(u) = \begin{pmatrix} R \cos u \\ R \sin u \\ \frac{H}{2\pi n} \cdot u \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{\gamma}'(u) = \begin{pmatrix} -R \sin u \\ R \cos u \\ \underline{\underline{H/2\pi n}} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A = - \int_{\gamma} \vec{F}_g d\vec{\ell} = - \int_0^{2\pi n} \underbrace{\langle \vec{F}_g, \vec{\gamma}'(u) \rangle}_{= -mg \frac{H}{2\pi n}} du = +mgH \quad \checkmark$$

Länge eines Wegs :

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} |\vec{dx}| := \int_{u_1}^{u_2} |\vec{\gamma}'(u)| du$$

Beispiel : Länge des Schraubenwegs :

$$\vec{\gamma}'(u) = \begin{pmatrix} -R \sin u \\ R \cos u \\ H/2\pi u \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{\gamma}'(u)|^2 = R^2 + \left(\frac{H}{2\pi u}\right)^2$$

$$\begin{aligned} \rightarrow L(\vec{\gamma}) &= \int_0^{2\pi u} |\vec{\gamma}'(u)| du = \sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi u}\right)^2} \cdot 2\pi u \\ &= \sqrt{(2\pi R u)^2 + H^2} \end{aligned}$$

┌ für $u=1$, $H=0$: $L(\vec{\gamma}) = 2\pi R$ ✓ ─┐

besonders leicht können konservative Vektorfelder
längs Wege integriert werden; dazu zuerst
einige Definitionen



Skalarfeld, Potenzial, konservatives Vektorfeld

Skalarfeld $U = \text{Abb. } U: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $\vec{r} \mapsto U(\vec{r})$

Potenzial

Ein Skalarfeld U ist ein Potenzial des Vektorfelds $\vec{A}$ g. d. w.

$$\vec{A} = -\text{grad } U$$



Vorsicht: es gibt auch VFer für die man kein Potenzial findet!

→ Konservatives Vektorfeld

Ein Vektorfeld $\vec{A}$ ist konservativ g. d. w. ein Potenzial U zu $\vec{A}$ existiert.

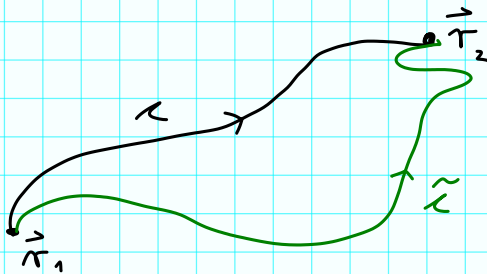
Γ d.h. für ein konservatives VF $\vec{A}$ gibt es immer ein Skalarfeld U d.h., dass
 $\vec{A} = -\text{grad } U$ └

→ Satz 2

Satz:

$\vec{A}$ konservatives VF mit Potenzial U ,
 κ Weg von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$; dann

$$\int_{\kappa} \vec{A} d\vec{\ell} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2)$$



$$\int_{\kappa} \vec{A} d\vec{\ell} \stackrel{!}{=} \int_{\tilde{\kappa}} \vec{A} d\vec{\ell}$$

┌

$$\int_{\kappa} \vec{A} d\vec{\ell} = \int_{u_1}^{u_2} \langle \vec{A}(\vec{r}(u)), \vec{r}'(u) \rangle du$$

$$= - \int_{u_1}^{u_2} \underbrace{\langle \text{grad } U(\vec{r}(u)), \vec{r}'(u) \rangle}_{\text{"Übg. 30"}} du$$

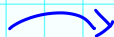
$$= - \int_{u_1}^{u_2} \underbrace{\frac{dU(\vec{r}(u))}{du}}_{\text{"Übg. 30"}} du$$

HDI

$$= U(\vec{r}(u_1)) - U(\vec{r}(u_2)) = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2)$$

└

Beispiel



Schwerkraftfeld $\vec{F}_g = -mg \vec{e}_3$ ist konservativ,

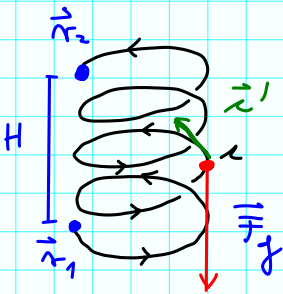
da $-mg \vec{e}_3 = -\text{grad}(mgz)$ und

damit

$$U(\vec{r}) := mgz$$

ein Potenzial zu $\vec{F}_g$ ist

→ Arbeit längs Schraubenweg:



$$\begin{aligned} A &= \oint_C \vec{F}_g \cdot d\vec{l} = U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1) \\ &= mgz_2 - mgz_1 \\ &= mgH \quad \checkmark \end{aligned}$$