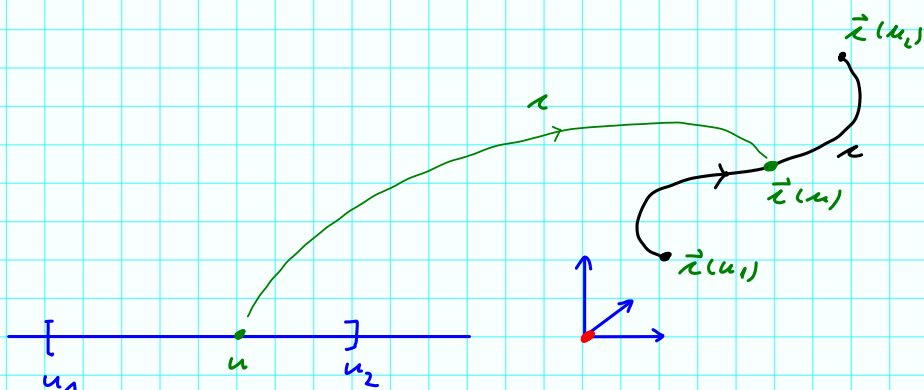


Wahlg. VL 18:

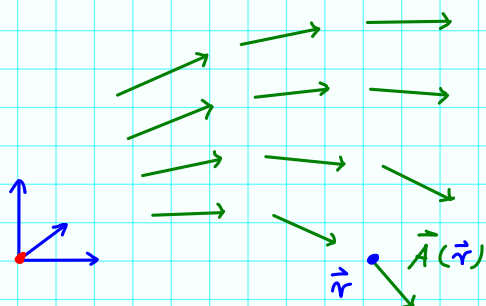
Weg γ parametrisiert durch Abb $\gamma: [u_1, u_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$u \mapsto \vec{\gamma}(u) = \dots$$



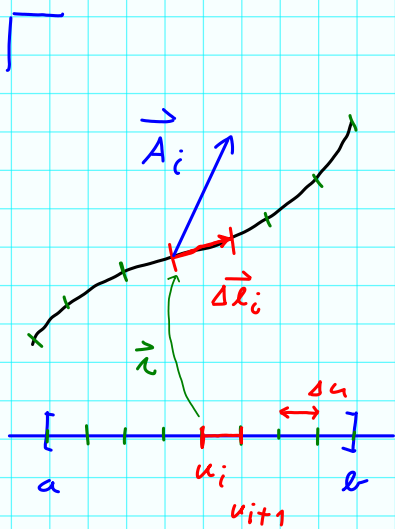
Vektorfeld $\vec{A}$ $\hat{=}$ Abb $\vec{A}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\vec{r} \mapsto \vec{A}(\vec{r})$$



Wegintegral des Vektorfelds $\vec{A}$ läng Weg γ :

$$\int_{\gamma} \vec{A} d\vec{\ell} := \int_{u_1}^{u_2} \langle \vec{A}(\vec{\gamma}(u)), \vec{\gamma}'(u) \rangle du$$



$$\int_{\gamma} \vec{A} d\vec{\ell} = \sum_i \langle \vec{A}_i, \underline{\underline{\Delta \vec{\ell}_i}} \rangle$$

$$= \sum_i \langle \vec{A}(\vec{\gamma}(u_i)), \vec{\gamma}'(u_i) \Delta u \rangle$$

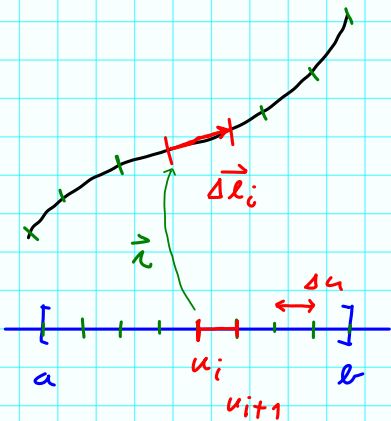
$$= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \int_a^b \langle \vec{A}(\vec{\gamma}(u)), \underline{\underline{\vec{\gamma}'(u)}} \rangle du$$

$$\vec{A}_i = \vec{A}(\vec{\gamma}(u_i))$$

$$\underline{\underline{\Delta \vec{\ell}_i}} = \vec{\gamma}(u_i + \Delta u) - \vec{\gamma}(u_i) = \vec{\gamma}'(u_i) \Delta u$$

Länge eines Wegs γ :

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} |\vec{dl}| := \int_{u_1}^{u_2} |\vec{\gamma}'(u)| du$$



$$\begin{aligned} \int_{\gamma} |\vec{dl}| &= \sum_i |\Delta \vec{l}_i| \\ &= \sum_i |\vec{\gamma}'(u_i)| \Delta u \\ &\underset{\Delta u \rightarrow 0}{=} \int_a^b |\vec{\gamma}'(u)| du \end{aligned}$$

$$\Delta \vec{l}_i = \vec{\gamma}(u_i + \Delta u) - \vec{\gamma}(u_i) = \vec{\gamma}'(u_i) \Delta u$$

Skalarfeld U = Abb. $U: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $\vec{r} \mapsto U(\vec{r})$

Potenzial

Skalarfeld U ist Potenzial des Vektorfeldes $\vec{A}$

: $\Leftrightarrow$

$$\boxed{\vec{A} = -\text{grad } U}$$

$\uparrow$ Vektorfeld $\uparrow$ Skalarfeld

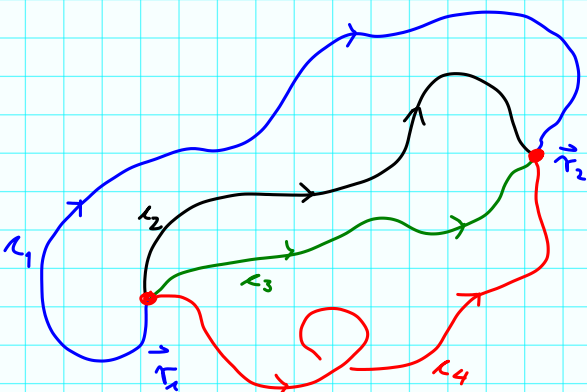
Konservatives Vektorfeld

Vektorfeld $\vec{A}$ konservativ

: $\Leftrightarrow$ es existiert ein Potenzial U zu $\vec{A}$,
d.h. $\vec{A} = -\text{grad } U$

- $\vec{A}$ konservativ, $\hookrightarrow$ Weg von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$

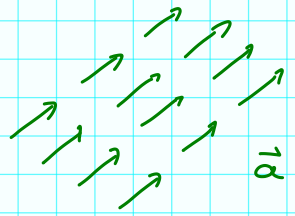
$\Rightarrow \int_{\gamma} \vec{A} d\vec{\ell} = \overset{!}{=} U(\underline{\vec{r}_1}) - U(\underline{\vec{r}_2})$



$$\int_{\gamma_1} \vec{A} d\vec{\ell} = \int_{\gamma_2} \vec{A} d\vec{\ell} = \int_{\gamma_3} \vec{A} d\vec{\ell} = \int_{\gamma_4} \vec{A} d\vec{\ell}$$

Beispiele konservativer Vektorfelder:

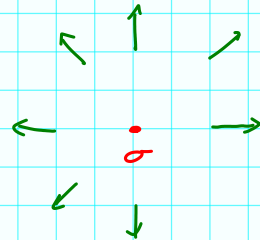
1) konstante Vf: $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{a}$



Potenzial $U(\vec{r}) = -\langle \vec{a}, \vec{r} \rangle$

┌ dann $+\text{grad} \langle \vec{a}, \vec{r} \rangle = \vec{a}$ ✓ ┘

2) Zentralfeld $\vec{A}(\vec{r}) = h(|\vec{r}|) \hat{r}$ (x)
isotropes

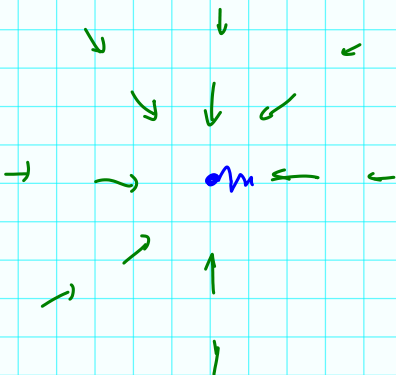


Potenzial: $U(\vec{r}) = -H(|\vec{r}|)$

mit H Stammfkt. zu h ($H' = h$)

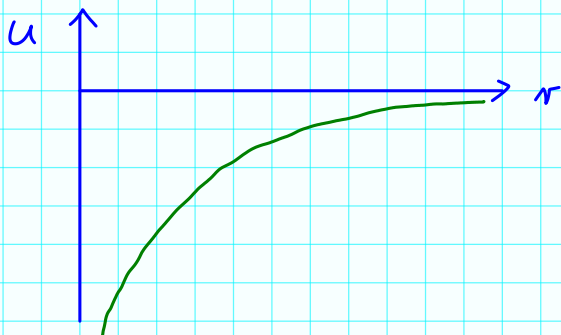
┌ $-\text{grad} U(|\vec{r}|) = \text{grad} H(|\vec{r}|) = \underbrace{H'(|\vec{r}|)}_{h(|\vec{r}|)} \hat{r} \stackrel{(x)}{=} \vec{A}(\vec{r})$ ┘

a) Gravitationsfeld einer Punktmasse m im σ :

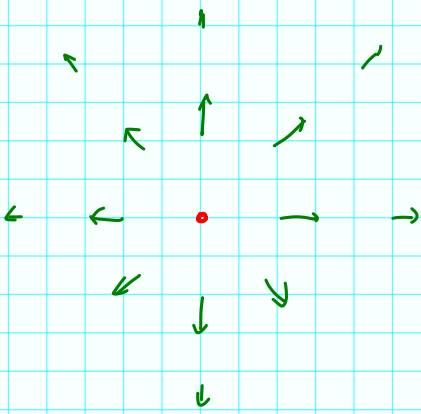


$$\vec{G}(\vec{r}) = -\gamma m \frac{1}{r^2} \hat{r}$$

$$U(\vec{r}) = -\gamma m \frac{1}{r} \quad r = |\vec{r}|$$

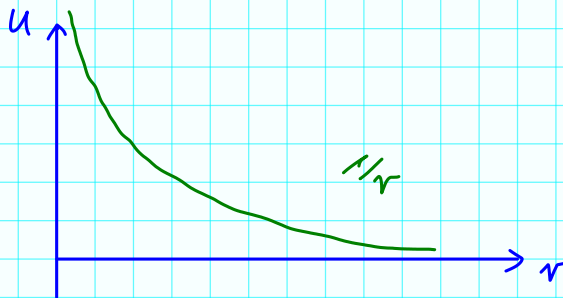


b) elektr. Feld einer Punktladung q im a :



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r}$$

$$U(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

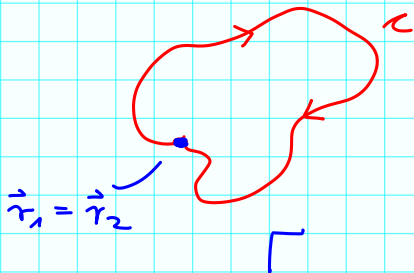


3) lineares Kraftfeld: $\vec{F}(\vec{r}) = -k \vec{r}$
 $= -k |\vec{r}| \hat{r}$

$$\rightarrow U(\vec{r}) = \frac{k}{2} |\vec{r}|^2 \quad \checkmark$$

Bemerkung:

$\vec{A}$ konservativ $\Rightarrow$ für jeden geschlossenen Weg γ ist



$$\int_{\gamma} \vec{A} d\vec{b} = 0$$

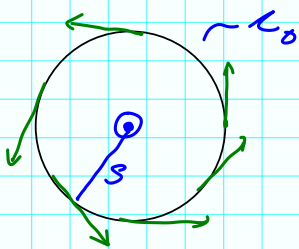
$$\int_{\gamma} \vec{A} d\vec{b} = U(\vec{r}_2) - U(\underset{\vec{r}_1}{\vec{r}_1}) = 0 \quad \checkmark$$

Folgerung:

$\vec{r}_0$ geschlossen und $\int_{\vec{r}_0} \vec{A} d\vec{\ell} \neq 0$

$\Rightarrow \vec{A}$ nicht konservativ!

z.B. Magnetfeld $\vec{B}(s, \varphi, z) = f(s) \cdot \underline{\underline{\vec{e}_\varphi}}$

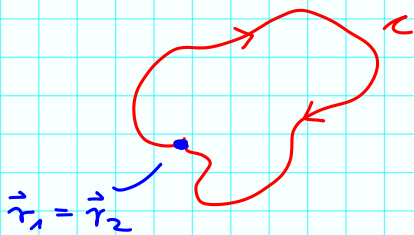


$$\int_{\vec{r}_0} \vec{B} d\vec{\ell} \neq 0!$$

$\rightarrow \underline{\underline{\vec{B}}}$ nicht konservativ!

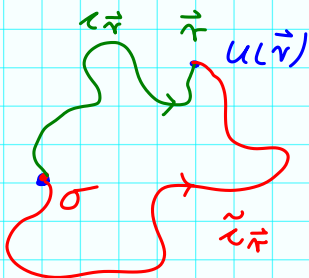
$\vec{A}$ konservativ $\stackrel{!}{\Leftrightarrow}$ für jeden geschlossenen Weg γ ist

$$\int_{\gamma} \vec{A} d\vec{\ell} = 0$$



$\Gamma \Leftarrow$ definierte Skalarfeld

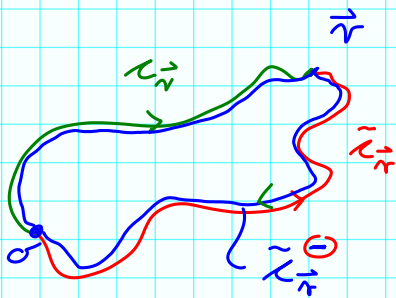
$$\underline{\underline{U(\vec{r})}} := - \int_{\gamma_{\vec{r}}} \vec{A} d\vec{\ell}$$



$\gamma_{\vec{r}}$ ist ein beliebiger Weg von σ nach $\vec{r}$!

$U(\vec{r})$ wohldefiniert?

z. Z.:



$$\int_{l_{\vec{r}}} \vec{A} d\vec{l} \stackrel{!}{=} \int_{\tilde{l}_{\vec{r}}} \vec{A} d\vec{l} \quad (*)$$

$\gamma_0 = "l_{\vec{r}} + \tilde{l}_{\vec{r}}^{\ominus}"$: geschlossener Weg!

$$0 \stackrel{n.V.}{=} \int_{\gamma_0} \vec{A} d\vec{l} = \int_{l_{\vec{r}}} \vec{A} d\vec{l} + \underbrace{\int_{\tilde{l}_{\vec{r}}^{\ominus}} \vec{A} d\vec{l}}_{= - \int_{\tilde{l}_{\vec{r}}} \vec{A} d\vec{l}}$$

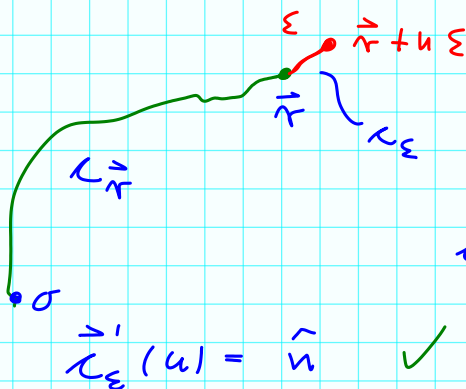
$\rightarrow (*)$!

bleibt z. Z.: $U(\vec{r})$ ist Potenzial zu $\vec{A}$!

$\varepsilon \ll 0$

$$U(\vec{r} + \varepsilon \hat{u}) = \underline{U(\vec{r})} + \varepsilon \langle \underline{\text{grad } U(\vec{r})}, \hat{u} \rangle$$

$$\stackrel{!}{=} - \underbrace{\int_{l_{\vec{r}}} \vec{A} d\vec{l}}_{U(\vec{r})} - \int_{l_{\varepsilon}} \vec{A} d\vec{l}$$



$$l_{\varepsilon} : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$u \mapsto \vec{r} + u \hat{u}$$

$$\vec{l}'_{\varepsilon}(u) = \hat{u} \quad \checkmark$$

$$\int_{l_{\varepsilon}} \vec{A} d\vec{l} = \int_0^{\varepsilon} \langle \vec{A}(\vec{r}), \hat{u} \rangle du = \varepsilon \langle \vec{A}(\vec{r}), \hat{u} \rangle$$

$$\text{d.h.} \quad - \langle \text{grad } U(\vec{r}), \hat{u} \rangle = \langle \vec{A}(\vec{r}), \hat{u} \rangle$$

$$\rightarrow - \text{grad } U(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r})$$

$$\text{d.h.} \quad U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}} \vec{A} d\vec{r} \quad \text{ist Potential zu } \vec{A} !$$