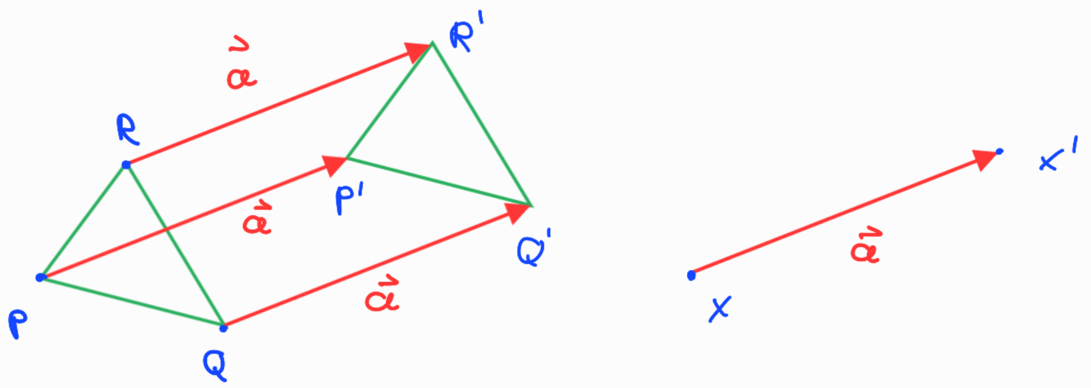
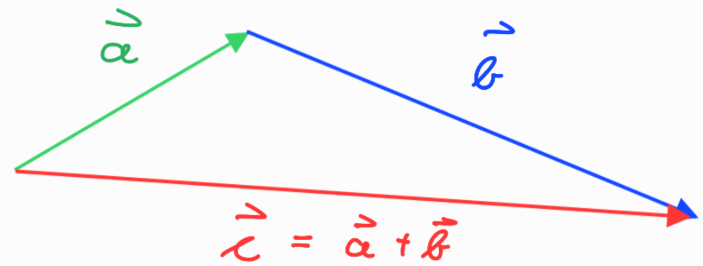
Wiederholung:

Translation als Prototyp eines Vektors:



Translation $\vec{a} = \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{PP'} = \dots = \overrightarrow{XX'}$

Hintereinanderausführung = Addition:



$\Rightarrow$ Eigenschaften der Addition (Geometrie!):

(A1) Assoziativität:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

(A2) Existenz der Null-Translat. $\vec{o}$:

$$\vec{a} + \vec{o} = a$$

(A3) Existenz der inversen Translation

$(-\vec{a})$ zu $\vec{a}$:

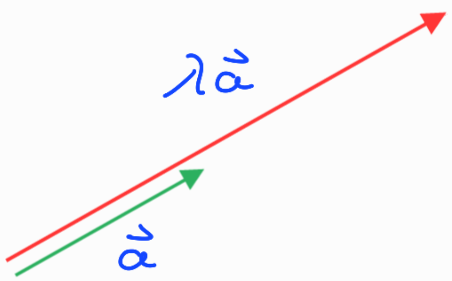
$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

(A4) Kommutativität :

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

- Streckung (Stauchung) einer Translat. $\vec{a}$ um Faktor $\lambda > 1$ (bzw. $\lambda < 1$):

$\hat{=}$ Skalarmultiplikation von $\vec{a}$ mit Faktor ("Skalar") $\lambda \in \mathbb{R}$



$\lambda = 2,3 \in \mathbb{R}$

Geometrie ⟶

Eigenschaften der Skalarmultiplikation:

(S1) $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

(S2) $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

(S3) $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$

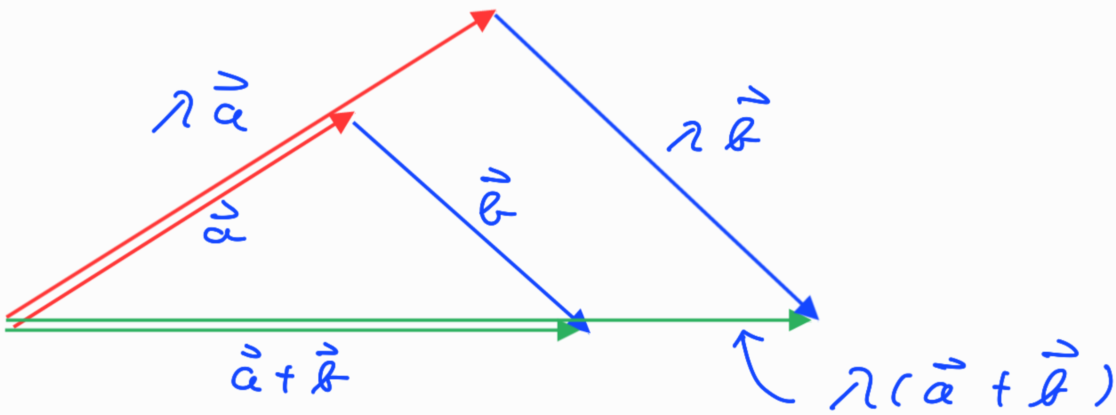
(S4) $1\vec{a} = \vec{a}$

aus (S1) – (S4) folgt:

(S5) $0\vec{a} = \vec{0}$

(S6) $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$

⌈ z.B. (S1):



⌋

Translationen wesentlich bestimmt durch Verhalten unter Addition (A1 – A4) und Skalarmultiplikation (S1 – S4) !

→ Idee :

allgemeine Vektoren sind Objekte, für die Addition und Skalarmultiplikation gleichermaßen erklärt sind !

Def. : Vektoren, Vektorraum

Eine Menge V von Objekten mit Addition und Skalarmultiplikation gemäß (A1 – A4) bzw. (S1 – S4) bildet einen Vektorraum; die Elemente von V sind Vektoren.

Beispiele: a) Translationen ✓

b) $\mathbb{R}^n$ = Menge aller reellen n-Tupel

$$= \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

- **Addition:**

$$\vec{x} + \vec{y} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

- **Skalarmultiplikation:**

$$\lambda \vec{x} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

erfüllen offenbar (A1 – A4) bzw. (S1 – S4)

$\rightarrow$ $\mathbb{R}^n$ mit Addition und Skalarmultiplikation bilden einen Vektorraum ✓

1) Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bilden Vektorraum!

$$f : x \mapsto f(x)$$

$$g : x \mapsto g(x)$$

- Addition:

$$f+g : x \longmapsto f(x)+g(x)$$

- Skalarmultipl.:

$$\lambda f : x \longmapsto \lambda f(x)$$

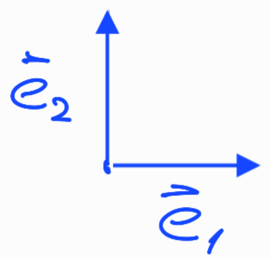
erfüllen offenbar (A1–A4), (S1–S4)

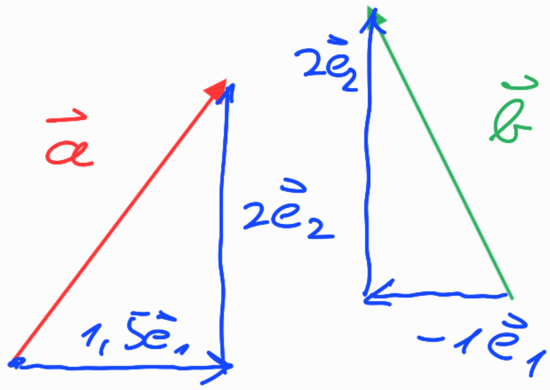
↑ Nullvektor:

$$0 : x \longmapsto 0$$

Basis eines VRs → Basisdarstellung, Dimension eines VR

zuerst am Bsp. der ebenen Translationen:





Basis $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

$$\lambda \vec{a} =$$

$$\rightarrow \quad \vec{a} = 1{,}5\, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 =: \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}_B$$

$$\vec{b} = -1\, \vec{e}_1 + 2\, \vec{e}_2 =: \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}_B$$

Komponenten von $\vec{a}$ (bzw $\vec{b}$)

bzgl. Basis $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

allg.:

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B$$

→ Rechnen in Komponenten:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}_B :$$

$$\begin{aligned}
\vec{a} + \vec{b} &= a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 \\
&= a_1 \vec{e}_1 + b_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + b_2 \vec{e}_2 \\
&= (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2 \\
&= \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}_B
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}_B}$$

- $\lambda \vec{a} = \lambda (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) = \lambda a_1 \vec{e}_1 + \lambda a_2 \vec{e}_2$

$$= \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}_B$$

$$\lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}_B$$

allgemeiner für bel. VRe:

<u>Def</u>: Eine Basis B eines VRs V besteht aus hinreichend vielen <u>Basisvektoren</u>

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$$

derart, dass jeder Vektor $\vec{a} \in V$ <u>eindeutig</u> gemäß

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \cdots + a_n \vec{e}_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B$$

Komponenten von $\vec{a}$ bzg. B

dargestellt werden kann.

Die Anzahl n der Basisvektoren ist die Dimension des VRs V ($\dim V$).

Bspe:

a) VR $\mathbb{R}^n$ mit Standardbasis

$$B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$$

mit $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n \ni \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \cdots + x_n \vec{e}_n$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_B$$

b) Menge der rationalen Funktionen maximal n-ten Grades:

$$P_n = \{ f : x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R} \}$$

mit Addition und Skalarmultiplikation wie bei Funktionen bildet VR!

($f + g \in P_n$, $\lambda f \in P_n$ ✓)

<u>Basis</u>: $B = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ mit

$$e_0 : x \mapsto 1$$

$$e_1 : x \mapsto x$$

$$e_2 : x \mapsto x^2$$

$$\vdots$$

$$e_n : x \mapsto x^n$$

$$f : x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = f(x)$$

$$\rightarrow \underset{\overset{\cap}{P_n}}{f} = \overset{\mathbb{R}}{\underset{\vee}{a_0}}\, \underset{\overset{\cap}{P_n}}{e_0} + a_1 e_1 + \cdots\; a_n e_n = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B$$

$$\rightarrow \dim P_n = n+1$$

Γ $n = 2$, $\quad B = (e_0, e_1, e_2)$

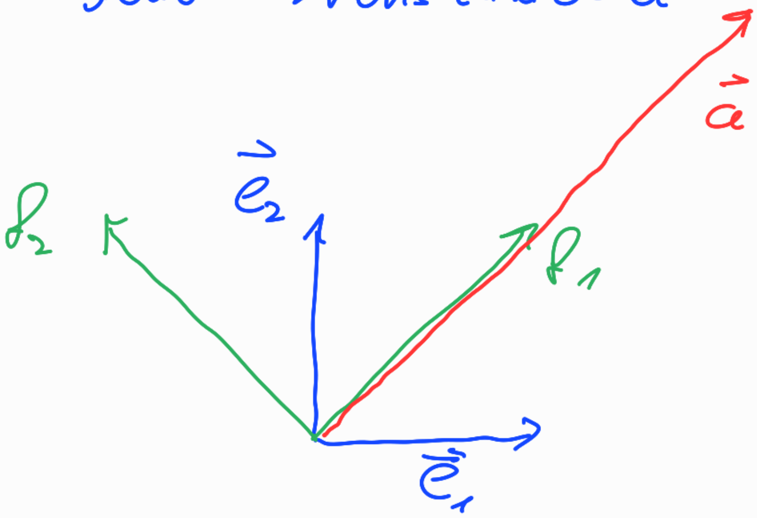
$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_B$$

$$f(x) = (1e_0 + 2e_1)(x)$$

$$= \underset{\overset{\parallel}{1}}{e_0(x)} + \underbrace{2e_1(x)}_{2x} = 1 + 2x$$

Vorsicht: Komponenten eines Vektors sind von der gewählten Basis abhängig!

Bsp: ebene Translationen:



Basis $\quad B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

Basis $\quad B' = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}_B = \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{B'}$$

Grundbegriffe:

- Linearkombination
- lineare Unabhängigkeit
- Vollständigkeit

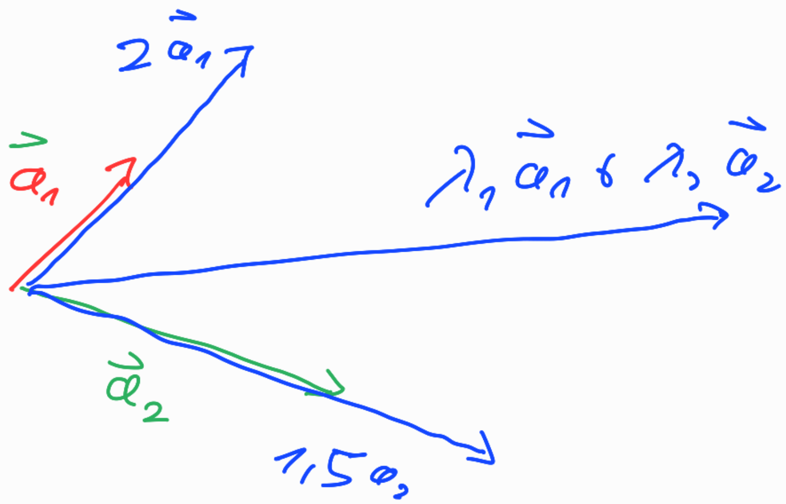
Die <u>Linearkombination</u> der

Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \in V$ und

Skalare $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ ist

der Vektor

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k \in V$$



- Ein System von Vektoren

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$$

ist linear unabhängig g.d.w.

$$\vec{0} \overset{!}{=} \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

- Ein System von Vektoren

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$$

ist vollständig (ein Erzeugendensystem)

g. d. u. jeder Vektor $\vec{a} \in V$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ dargestellt werden kann.