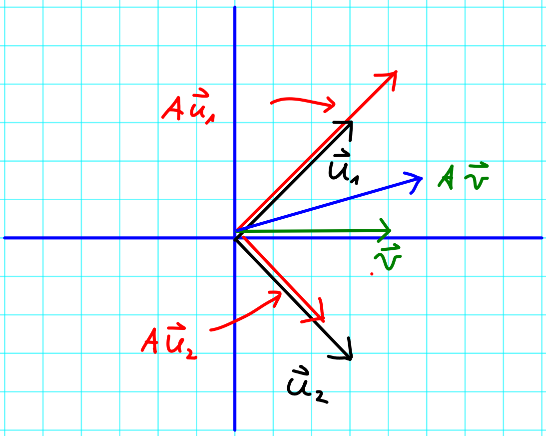
Wdhlg.:

$\vec{u}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert λ einer lin. Abb. A

g.d.w. $\boxed{A\vec{u} = \lambda\vec{u}}$ $(\vec{u} \neq 0)$



Beispiel: $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit Abbildungsmatrix bzgl. Standarbasis $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

$${}_BA_B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (a+b)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (a-b)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\rightarrow$ normierte Eigenvetoren $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

zu Eigenwerte $\lambda_1 = a+b$, $\lambda_2 = a-b$

d.h. $A\vec{u}_1 = \lambda_1 \vec{u}_1$, $A\vec{u}_2 = \lambda_2 \vec{u}_2$

$\rightarrow$ diagonale Abb.-matrix bzg. Eigenbasis $E = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$:

$${}_EA_E = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

→ **Eigenwertproblem:**

finde Lösungen der Eigenwertgleichung

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u} \qquad !$$

benötigen dazu:

Determinante einer $n \times n$ Matrix

$$A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} :$$

$\det A :=$ orientierte n-dimensionale Volumen des durch die Spaltenvektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ aufgespannten n-Spats

$n = 1$: $\quad \det(a_{11}) = a_{11}$

$n = 2$: $\quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$n = 3$: $\quad \det\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right) = \langle \vec{a}_1 \times \vec{a}_2, \vec{a}_3 \rangle$

Regel von Sarrus:

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle$$

$$\| $$

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array}\right) \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{array}$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

Wie hilft die Determinante beim Eigenwertproblem??

$$A \vec{u} \overset{!}{=} \lambda \vec{u} \qquad ?$$

(i) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ linear abhängig

$$\Longleftrightarrow \quad \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = 0$$

geometrisch klar $n \leq 3$

(Beweis für allg. n: s. u.)

(ii) $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ linear abhängig

$$\overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists\, \vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ \vec{x} \neq \vec{0}: \quad \underbrace{\vec{a}_1 x_1 + \vec{a}_2 x_2 + \dots + \vec{a}_n x_n}_{\|} = \vec{0}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \exists\, \vec{x} \neq \vec{0}: \quad (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)\, \vec{x} = \vec{0}$$

(iii) Eigenwertgl.:

$$A\,\vec{u} = \lambda\,\vec{u} \quad : \quad A: V \to V$$

$\vec{u} \in V \setminus \{\vec{o}\}$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Longleftrightarrow \qquad {}_B A_B\,\vec{u}_B = \lambda\,\vec{u}_B$$

Basis B von V

${}_B A_B$: $n \times n$ Matrix

$\vec{u}_B \in \mathbb{R}^n$

$$\Leftrightarrow \quad {}_B A_B\,\vec{u}_B = \lambda\,\mathbb{1}_n\,\vec{u}_B$$

mit n-dim Einheitsmatrix $\mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \quad {}_B A_B\,\vec{u}_B - \lambda\,\mathbb{1}_n\,\vec{u}_B = \vec{o}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left({}_B A_B - \lambda\,\mathbb{1}_n\right)\underbrace{\vec{u}_B}_{\neq\vec{o}} = \vec{o}$$

Lösung $\vec{u}_B \neq \vec{o}$ existiert

g.d.w. (ii) Spaltenvektoren von ${}_B A_B - \lambda\,\mathbb{1}_n$

lin. abhängig;

der Fall g.d.w. (i):

$$\det\left({}_B A_B - \lambda\,\mathbb{1}_n\right) \overset{!}{=} 0$$

$\to$ d.h. $\boxed{\lambda \text{ EW der Abb. } A \iff \det\left({}_B A_B - \lambda\,\mathbb{1}_n\right) = 0}$

Def: $\chi_A(\lambda) := \det\left({}_B A_B - \lambda\,\mathbb{1}_n\right)$ ist das charakteristische Polynom der Abb. A

λ EW der lin. Abb. $A \iff \chi_A(\lambda) = 0$

Die Nullstellen des charakt. Polynoms sind genau die Eigenwerte einer lin. Abb

Beispiel: $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow \chi_A(\lambda) = \det\left(A - \lambda \mathbb{1}_2\right) = \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & a-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)^2 - b^2$$

Eigenwerte von A = Nullstellen von $\chi_A(\lambda)$!

$$(a-\lambda)^2 - b^2 = 0$$

$$a - \lambda_{1/2} = \mp b \quad \rightsquigarrow \quad \lambda_1 = a + b$$
$$\lambda_2 = a - b$$

Eigenwerte $\overset{?}{\longrightarrow}$ Eigenvektoren :

EW $\lambda_1 \rightsquigarrow \quad 0 = \chi_A(\lambda_1) = \det(A - \lambda_1 \mathbb{1}_n)$

d.h. $\left(A - \lambda_1 \mathbb{1}_n\right)\vec{u} = \vec{0}$ besitzt

Lösung $\vec{u} \neq 0 \rightsquigarrow$ Eigenvektor ! zu λ_1

Bsp:

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}\right\}\vec{u} = \vec{0}$$

$\lambda_1 = a+b$

$$\iff \begin{pmatrix} -b & b \\ b & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\rightsquigarrow u_1 = u_2 \underset{\text{z.B.}}{=} 1 \rightsquigarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

Frage: allg. lin. Abb. $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Gibt es immer einen Eigenvektor / -wert?

$\vec{u} \neq \vec{0}$ $\quad$ λ

$$A \vec{u} = \lambda \vec{u} \quad ?$$

Ja! denn char. Polynom $\chi_A(\lambda)$ als Polynom 3. Grades besitzt mindestens eine Nullstelle $\lambda_0 \equiv$ Eigenwert λ_0!

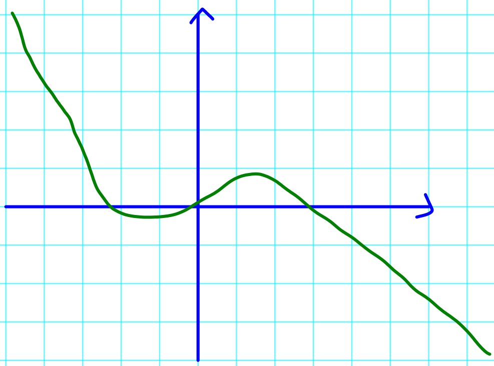
$$A = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$\to \chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a_1 - \lambda & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{Sarrus}}{=} (a_1 - \lambda)(b_2 - \lambda)(c_3 - \lambda) + \sigma(\lambda)$$

$$= -\lambda^3 + (\ldots)\lambda^2 + (\ldots)\lambda + (\ldots) \begin{cases} +\infty : \lambda \to -\infty \\ -\infty : \lambda \to +\infty \end{cases}$$

z.B.



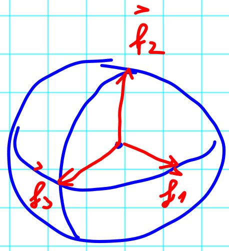
$\to \exists$ Nullstelle λ_0!

$\chi_A(\lambda)$ stetige Fkt. von λ!

Korollar: "Satz vom Fußball"

Auf der Oberfläche eines Fußballs gibt es einen Punkt, der sich beim Anstoß zur 1. und 2. Halbzeit am selben Ort befindet!

Beweis:



$\tilde{B} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ $t = t_1$:

"körperfeste" Basisvektoren

o.B.d.A.: $t = t_1$: $\vec{e}_1 = \vec{f}_1$, $\vec{e}_2 = \vec{f}_2$, $\vec{e}_3 = \vec{f}_3$

$t = t_2$: $\tilde{B} = (\vec{f}_1{}', \vec{f}_2{}', f_3')$: $\vec{e}_i \neq \vec{f}_i{}'$!

$\rightarrow$ lin. Abb.: $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 \xrightarrow{A} \vec{f}_1{}'$

$\vec{f}_2 = \vec{e}_2 \rightarrow \vec{f}_2{}'$

$\vec{f}_3 = \vec{e}_3 \rightarrow \vec{f}_3{}'$

d.h. $A\vec{e}_i \overset{!}{=} \vec{f}_i{}'$: $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Abb. A erhält Längen und Winkel ≡ normerhalten : A ist Isometrie

(und damit linear!)

d.h. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \overset{!}{=} \langle A\vec{x}, A\vec{y} \rangle$

insb. $|\vec{x}| = |A\vec{x}|$ (*)

wir wissen: $\exists\, \vec{u}$: $A\vec{u} = \lambda \vec{u}$!

wegen (*) : $|\vec{u}| = |A\vec{u}| = |\lambda \vec{u}| = \underline{|\lambda|}\,|\vec{u}|$

ist $\lambda = +1$ oder $\lambda = -1$

! ?

Lage des Balls zur Zeit $t \in [t_1, t_2]$

sei beschrieben durch $A_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ONB $\longrightarrow$ $A_t\vec{e}_1, A_t\vec{e}_2, A_t\vec{e}_3$

ONB

der Eigenwert $\lambda(t)$ von A_t ist <u>stetige</u>

Fkt. von t, für alle t $|\lambda(t)| = 1$ (da A

Isometrie), daher $\lambda(t)$ konstant vom

Wert $\lambda(t_1) = +1$; d.h. $\underline{\lambda} = \lambda(\underline{t_2}) = 1$