

Wdhlg.:

λ Eigenwert der
lin. Abb A

$\Leftrightarrow$

λ Nullstelle des
Charakteristischen Polynoms

$$\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda \mathbb{1})$$

$\uparrow$

$$A\vec{u} = \lambda \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda \mathbb{1}) \vec{u} = \vec{0} \quad \text{für } \vec{u} \neq \vec{0}$$

$$\vec{u} \neq \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \text{Spaltenvektoren von } (A - \lambda \mathbb{1})$$

linear abhängig

$$\Leftrightarrow \det(A - \lambda \mathbb{1}) \stackrel{!}{=} 0$$

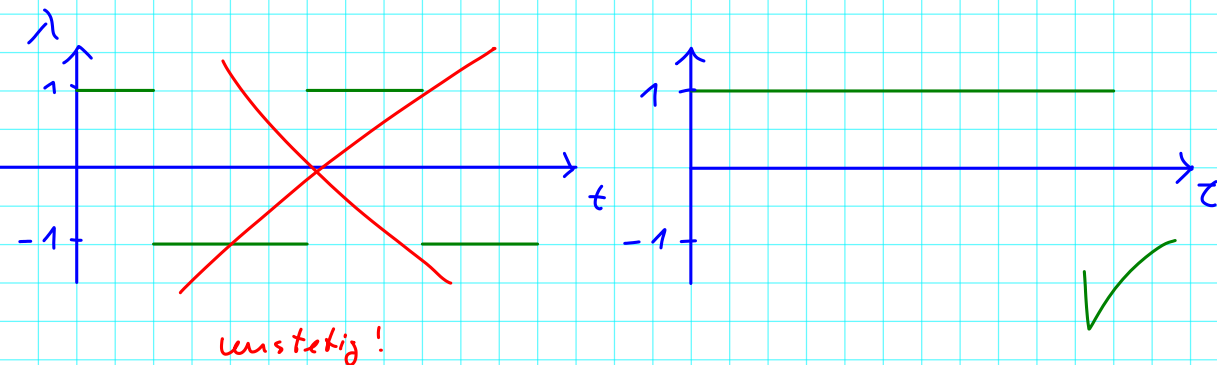
Eigenwert $\lambda \rightarrow$ Eigenvektor $\vec{u} \neq 0$ ist Lsg.
des lin. Gleichungssystems

$$(A - \lambda \mathbb{1}) \vec{u} = \vec{0}$$

┌ "Satz von Fußball":

Eigenwert $\lambda(t)$ der Isometrie A_t
ist stetig in t und $|\lambda(t)| = 1$

$\rightarrow \lambda(t)$ konstant vom Wert $\lambda(t_0) = +1$



Determinante einer $n \times n$ Matrix A

= orientierte Volumen in n Dimensionen

$\hookrightarrow n = 1, 2, 3 \quad \checkmark$

$$A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$$

$$\hookrightarrow \text{Vol}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = ?$$

Idee: finde hinreichend viele "natürliche" Eigenschaften, die ein Volumenmaß besitzen sollte

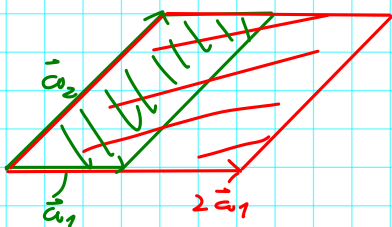
$\hookrightarrow$ Definition

$$\text{von } \text{Vol}(\dots) \equiv \det(\dots)$$

$\rightarrow$ Vorschläge:

1) $\text{Vol}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \stackrel{!}{=} 1$: Volumen des n -dim. Hyperkubus mit Kantenlänge 1
 $\uparrow$
Normierung

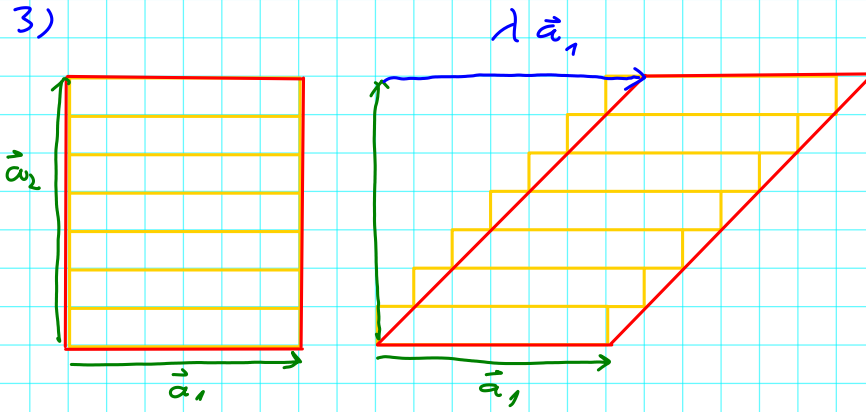
2) Skalierung:



$$n=2: \quad \text{Vol}(\lambda \vec{a}_1, \vec{a}_2) = \lambda \text{Vol}(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$$

$$\text{allg: } \text{Vol}(\vec{a}_1, \dots, \lambda \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n) \\ = \lambda \text{Vol}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n)$$

3)



Scherinvarianz:

$$n=2: \quad \text{Vol}(\vec{a}_1, \vec{a}_2) \stackrel{!}{=} \text{Vol}(\vec{a}_1, \vec{a}_2 + \lambda \vec{a}_1)$$

$$\text{allg:} \quad \text{Vol}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n) \\ \stackrel{!}{=} \text{Vol}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i + \lambda \vec{a}_l, \dots, \vec{a}_n) \\ \text{für } l \neq i$$

Def: Die Determinante $\det(A)$ einer $n \times n$ Matrix $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ ist eindeutig bestimmt durch folgende Eigenschaften:

(D1) Skalierung:

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \lambda \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n) \\ \stackrel{!}{=} \lambda \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n)$$

(D2) Scherinvarianz:

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i + \lambda \vec{a}_l, \dots, \vec{a}_n) \\ \stackrel{!}{=} \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n) \quad l \neq i$$

(D3) Normierung: $\det(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \stackrel{!}{=} 1$

$$\Gamma \quad \text{d.h.} \quad \det(\mathbb{1}_n) = 1 \quad \perp$$

$\leadsto$ Weitere Eigenschaften folgen aus D1, D2, D3:

(D4) verallgemeinerte Scherinvarianz

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n) = \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i + \sum_{k \neq i} \lambda_k \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_n) \quad \checkmark$$

(D5) $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ linear abhängig

$$\Rightarrow \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = 0$$

Γ Voraussetzung erfüllt: $\vec{a}_i \stackrel{!}{=} \sum_{k \neq i} u_k \vec{a}_k$

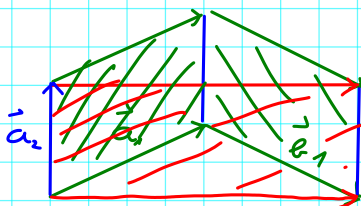
$$\begin{aligned} \leadsto \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n) & \stackrel{D4}{=} \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i - \underbrace{\sum_{k \neq i} u_k \vec{a}_k}_{=\vec{0}}, \dots, \vec{a}_n) \\ & = \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{0}, \dots, \vec{a}_n) \stackrel{D1}{=} 0 \quad \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{0}, \dots, \vec{a}_n) = 0! \quad \checkmark \end{aligned}$$

(D6) Linearität:

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i + \vec{b}_i, \dots, \vec{a}_n)$$

$$\stackrel{!}{=} \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n) + \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{b}_i, \dots, \vec{a}_n)$$

$\Gamma \quad n=2:$



$$\vec{b}_i = \lambda \vec{a}_i + \underbrace{\sum_{l \neq i} u_l \vec{a}_l}_{\vec{b}_\perp}$$

(✓)

$$\det(\dots, \vec{a}_i + \vec{b}_i, \dots) = \det(\dots, \vec{a}_i + \lambda \vec{a}_i + \underline{\vec{b}_\perp}, \dots)$$

$$\stackrel{D4}{=} \det(\dots, \underbrace{\vec{a}_i + \lambda \vec{a}_i}_{(1+\lambda)\vec{a}_i}, \dots) \stackrel{D1}{=} (1+\lambda) \det(\dots, \vec{a}_i, \dots)$$

$$\stackrel{D1}{=} \det(\dots, \vec{a}_i, \dots) + \underbrace{\det(\dots, \lambda \vec{a}_i, \dots)}_{\substack{\parallel \\ \det(\dots, \underbrace{\lambda \vec{a}_i + \vec{b}_\perp}_{=\vec{b}_i}, \dots)}}$$

$$= \det(\dots, \vec{a}_i, \dots) + \det(\dots, \vec{b}_i, \dots)$$

✓

⊥

(D7) Antisymmetrie

$$\det(\dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_j, \dots)$$

$$= \ominus \det(\dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_i, \dots)$$

Vorzeichenwechsel unter Spaltenvertauschung!

$$\left. \begin{array}{l} \text{l. s.} \\ D2 \end{array} \right\} = \det(\dots, \vec{a}_i + \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_j, \dots)$$

$$\stackrel{D1}{=} - \det(\dots, \vec{a}_i + \vec{a}_j, \dots, -\vec{a}_j, \dots)$$

$$\stackrel{D2}{=} - \det(\dots, \underline{\vec{a}_i + \vec{a}_j}, \dots, \underline{\vec{a}_i}, \dots)$$

$$\stackrel{D2}{=} - \det(\dots, \underline{\vec{a}_j}, \dots, \underline{\vec{a}_i}, \dots)$$

✓

⊥

$$(D5') \quad \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \underline{\underline{0}}$$

$\Rightarrow \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ lin. abhängig

$\Leftarrow$

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ lin. unabhängig $\Rightarrow$

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \neq 0$$

n. v. $\vec{e}_i = \sum_{j=1}^n e_{ij} \vec{a}_j$ für geeignete e_{ij}

$$0 \neq \det(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = \det\left(\sum_{j_1} e_{1j_1} \vec{a}_{j_1}, \sum_{j_2} e_{2j_2} \vec{a}_{j_2}, \dots, \sum_{j_n} e_{nj_n} \vec{a}_{j_n}\right)$$

$$= \sum_{j_1} \sum_{j_2} \dots \sum_{j_n} e_{1j_1} e_{2j_2} \dots e_{nj_n} \det(\vec{a}_{j_1}, \vec{a}_{j_2}, \dots, \vec{a}_{j_n})$$

$$= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} \begin{Bmatrix} 0 \\ +1 \\ -1 \end{Bmatrix} \det(\vec{a}_{j_1}, \dots, \vec{a}_{j_n})$$

$$= \left(\sum_{j_1} \dots \sum_{j_n} e_{1j_1} \dots e_{nj_n} \begin{Bmatrix} 0 \\ +1 \\ -1 \end{Bmatrix} \dots \right) \cdot \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$$

$$\rightarrow \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \neq 0 \quad \checkmark \quad \perp$$

(D8) Leibniz-Formel

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \sum_{\substack{\sigma \text{ Permutation} \\ i \rightarrow \sigma_i}} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma_1, 1} a_{\sigma_2, 2} \dots a_{\sigma_n, n}$$

$$\vec{a}_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} \vec{e}_j$$

$$\text{l. s.} = \det\left(\sum_{j_1=1}^n a_{j_1, 1} \vec{e}_{j_1}, \dots, \sum_{j_n=1}^n a_{j_n, n} \vec{e}_{j_n}\right)$$

$\uparrow$
Linearität

$$\sum_{j_1} \cdots \sum_{j_n} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} \det(\vec{e}_{j_1}, \dots, \vec{e}_{j_n})$$

$=$ $\left\{ \begin{array}{l} 0 : \text{Wenn zwei Indizes} \\ \text{übereinstimmen} \end{array} \right.$

$+1 : j_1 j_2 \dots j_n$ Permutation
von $(1, 2, \dots, n)$, darstellbar
mit gerader Anzahl
von Vertauschungen

$-1 : \begin{array}{ccc} & u & v \\ & & \\ u & & \end{array}$
ungerade

$$= \sum_{\sigma \text{ Perm.}} \text{sgn}(\sigma) \cdot a_{\sigma_1 1} a_{\sigma_2 2} \cdots a_{\sigma_n n}$$

$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1 : \\ -1 : \end{cases}$
"Signum"