Wdhlg.: $(\vec a_1, \dots, \vec a_n)$

$$\boxed{\det(A) = \text{orient. Volumen } \mathrm{Vol}(\vec a_1, \dots, \vec a_n)}$$

def. durch:

(D1) Skalierung:

$$\det(\vec a_1, \dots, \lambda \vec a_i, \dots \vec a_n) = \lambda \det(\vec a_1, \dots, \vec a_i, \dots \vec a_n)$$

(D2) Scherinvarianz:

$$\det(\vec a_1, \dots, \vec a_i, \dots \vec a_n) = \det(\vec a_1, \dots, \vec a_i + \lambda \vec a_\ell, \dots \vec a_n) \quad \ell \neq i$$

(D3) Normierung:

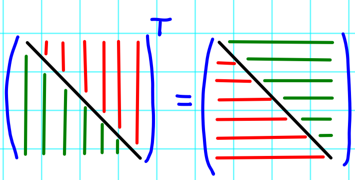
$$\det(\mathbb{1}) = 1$$

$\Rightarrow$

- $$\det(\dots, \vec a_i + \sum_{\ell \neq i} \lambda_\ell \vec a_\ell, \dots) = \det(\dots, \vec a_i, \dots)$$
- $$\boxed{\vec a_1, \dots, \vec a_n \text{ linear abhängig} \Leftrightarrow \det(\vec a_1, \dots, \vec a_n) = 0}$$
- Linearität:
$$\det(\dots, \vec a_i + \vec b_i, \dots) = \det(\dots, \vec a_i, \dots) + \det(\dots, \vec b_i, \dots)$$
- Antisymmetrie:
$$\det(\dots, \vec a_i, \dots, \vec b_j, \dots) = - \det(\dots, \vec b_j, \dots, \vec a_i, \dots)$$
- Leibnizformel:
$$\det(\vec a_1, \dots, \vec a_n) = \sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma_1 1} a_{\sigma_2 2} \cdots a_{\sigma_n n}$$

$\Rightarrow$

- $$\det(A) = \det(A^T)$$
$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$



Spalten $\leftrightarrow$ Zeilen

↳ • Spalten-Skalierung → Zeilen-Skalierung

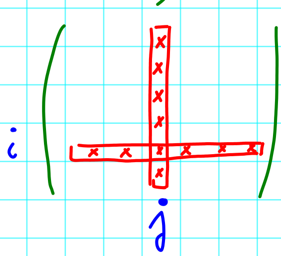
Spalten-Scherinvar. → Zeilen-Scherinvar.

Spalten-lin. Abhängigkt. → Zeilen-lin. Abhg.kt.

↳ • <u>Laplacescher Entwicklungssatz</u>

für $j \in 1, \dots, n$ fest gewählt:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$



lösche

i-te Zeile und

j-te Spalte

<u>Bsp</u>:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \underset{\text{L.E., } j=1}{=} a_{11} \det(a_{22}) - a_{21} \det(a_{12}) = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

Wieviele Schritte benötigt Determinantenberechnung?

- Leibniz: $N \approx n!$
- Laplace: $N \approx n!$
- "<u>Gauß</u>": $N \approx n^2$ **!**

↳ mittels Umformung der Matrix A in "obere/untere Dreiecksform":

Spezialfälle:

1) <u>Diagonalmatrix:</u>

$$\det\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots & d_n \end{pmatrix} \underset{D1,\, D3}{=} d_1 d_2 \cdots d_n$$

✓

2) <u>obere Dreiecksmatrix:</u>

$$\det\begin{pmatrix} d_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & d_2 & a_{23} & \cdots & \vdots \\ & & d_3 & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & d_n \end{pmatrix}$$

$$\underset{D2}{=} \det\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & d_2 & a_{23} & \cdots & \vdots \\ & & d_3 & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & d_n \end{pmatrix}$$

$$\underset{D2}{=} \det\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ & & d_3 & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & d_n \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$= \det\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ & & d_3 & 0 & 0 \\ & 0 & & \ddots & 0 \\ & & & & d_n \end{pmatrix} \overset{1)}{=} d_1 d_2 \cdots d_n$$

→ Det. einer allg. Matrix:

$$\det \begin{pmatrix} d_1 & a_{12} & \cdots & & a_{1n} \\ a_{21} & d_2 & \cdots & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & d_{n-1} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdot & d_n \end{pmatrix}$$

$$- \frac{a_{n2}}{d_n} \cdot \vec{a}_n$$

$$- \frac{a_{n1}}{d_n} \vec{a}_n \qquad \cdots$$

$$\overset{D2}{=} \det \begin{pmatrix} d_1' & a_{12}' & \cdots & & a_{1n} \\ a_{21}' & d_2' & \cdots & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{(n-1)1}' & a_{(n-1)2}' & \cdots & d_{n-1}' & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

$$\overset{D2}{=} \det \begin{pmatrix} d_1'' & a_{12}'' & \cdots & & a_{1n} \\ a_{21}'' & d_2'' & \cdots & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{n-1}' & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$= \det \begin{pmatrix} \tilde{d}_1 & \tilde{a}_{12} & \cdots & & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & \tilde{d}_2 & \cdots & & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{d}_{n-1} & \tilde{a}_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & & 0 & \tilde{d}_n \end{pmatrix} = \tilde{d}_1 \cdot \tilde{d}_2 \cdot \ldots \cdot \tilde{d}_n$$

Nachtrag 1 Matrixmultiplikation

lin. Abb.en:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^{l} \arrow[r, "A"] \arrow[rr, bend right, "C = B \circ A"'] & \mathbb{R}^{m} \arrow[r, "B"] & \mathbb{R}^{n} \end{tikzcd}$$

mit Abb.-matrizen:

$$A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_l) : \vec{a}_j = A\vec{e}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

$$= (a_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots l}}$$

$$B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m) : \vec{b}_i = B\vec{e}_i = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix}$$

$$= (b_{ki})_{\substack{k=1\dots n \\ i=1\dots m}}$$

Abb. $C = B \circ A : \mathbb{R}^{l} \to \mathbb{R}^{n}$

$\rightsquigarrow$ Abb.-matr. $C = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_l)$.

mit $\vec{c}_j = C\vec{e}_j = B\underbrace{A\vec{e}_j}_{\vec{a}_j} = B\vec{a}_j$

$\rightsquigarrow$ $\vec{c}_j = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix}$ mit $c_{kj} = \sum_{i=1}^{m} b_{ki}\, a_{ij}$

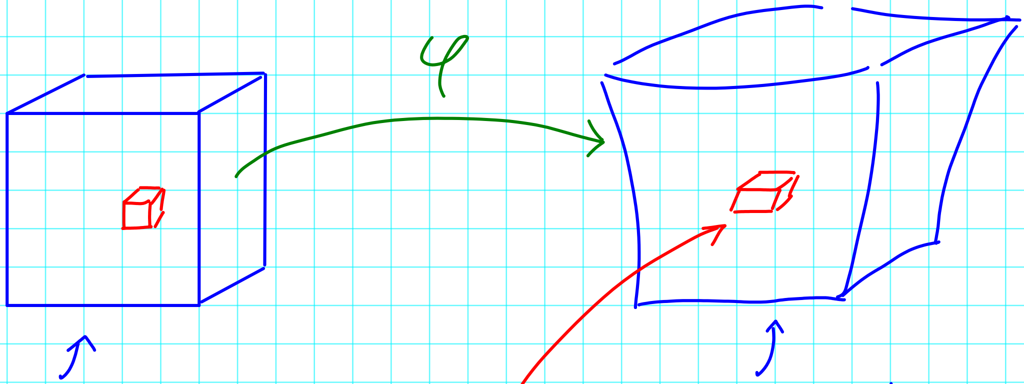
$\rightsquigarrow$ Matrixmultiplikation

$\underset{n \times m}{B}, \underset{m \times l}{A} \mapsto \underset{n \times l}{BA}$

$$\boxed{(BA)_{kj} := \sum_{i=1}^{m} b_{ki}\, a_{ij}}$$

$\rightarrow$ $$\boxed{\underline{\text{Matrixmultiplikationsatz}}: \quad \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)}$$

Nachtrag 2: n-dim. Volumenintegration:



$Q \subset \mathbb{R}^n$ $\qquad$ $G \subset \mathbb{R}^n$

$$\Delta V = \mathrm{Vol}\left(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x_1}\Delta x_1, \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x_2}\Delta x_2, \dots \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x_n}\Delta x_n\right)$$

$$\overset{!}{=} \det\left(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x_1}, \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x_2}, \dots\right)\Delta x_1 \cdots \Delta x_n$$

$\rightarrow$ $$\boxed{\int_G f \, dV := \int_Q f(\vec{\varphi}(x)) \cdot \det\left(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x_n}\right) d^n \vec{x}}$$

$\ulcorner$ $n = 3$:

$$\det\left(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x_1}, \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x_2}, \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x_3}\right) = \left\langle \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x_2}, \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x_3}\right\rangle \lrcorner$$

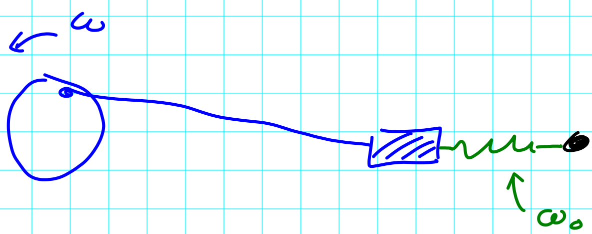
Fouriertransformation

Motivation: harm. Oszillator + "harmonische" ext. Kraft:

$$\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f e^{i\omega t}$$

ext. Frequenz ($= \Omega$)

Amplitude



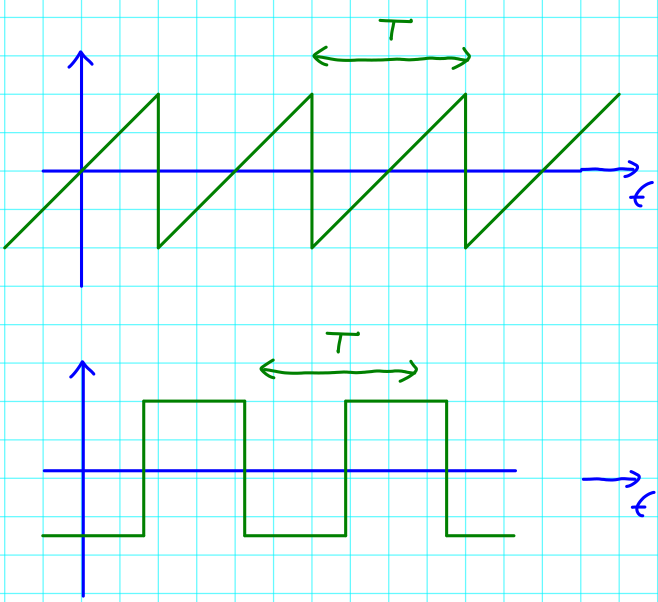
→ erzwungene harm. Schwingung:

$$x(t) = \mathrm{Re}\left(\frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} e^{i\omega t} \right)$$

$$= a \cos(\omega t - \varphi)$$

neues Problem: ext. Kraft geg. durch allg. periodische Fkt $f(t)$

→ wie lautet Oszillatorantwort $x(t)$?

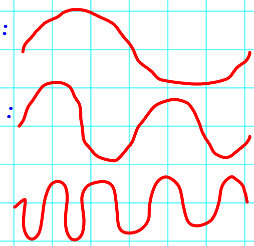


→ $x(t)$?

Fouriers Idee: stelle beliebige periodische Fkt. $f(t)$ dar als Überlagerung von harmonischen Oberschwingungen zu einer Grundfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$

(1768-1830)

Grundschwingung:	$\cos(\omega t),\ \sin(\omega t)$:	
1. Oberschwingung:	$\cos(2\omega t),\ \sin(2\omega t)$:	
2. Oberschwingung:	$\cos(3\omega t),\ \sin(3\omega t)$	
$\vdots$		
$(n-1)$. Oberschw. :	$\cos(n\omega t),\ \sin(n\omega t)$	



d.h.:
$$f(t) \overset{!?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(f_n^c \cos(n\omega t) + f_n^s \sin(n\omega t) \right)$$

periodische Fkt. in t,
Periode T
→ Grundfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$

einfacher: komplex!:

$$\cos(n\omega t) = \left(e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}\right)/2$$
$$\sin(n\omega t) = \left(e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}\right)/2i$$

$$\rightarrow \boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n\, e^{in\omega t}} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Fourierreihe der T-periodischen Fkt. $f(t)$

f_n: n-te Fourier-Koeffizient

Bsp.:

harm. Oszill. mit ext. Kraft

$$f(t) = \sum_n \underbrace{f_n \, e^{in\omega t}}$$

$$x(t) = \sum_n \mathrm{Re} \, \overbrace{\frac{f_n}{\omega_0^2 - (n\omega)^2 + i\gamma n\omega} \, e^{in\omega t}}$$

Problem: Wie bestimmen wir die Fourier koeff. f_n aus der geg. Fkt $f(t)$?

Erinnerung: lin. Algebra!

Bestimmung der Komponenten eines Vektors $\vec{u} \in V$ bzgl. einer ONB $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_N$

euklid. VR: Skalarprodukt $\langle \ldots, \ldots \rangle$!

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}_B = \sum_n u_n \vec{e}_n$$

es gilt:

$$u_\ell \stackrel{!}{=} \langle \vec{e}_\ell, \vec{u} \rangle$$

$$= \langle \vec{e}_\ell, \sum_n u_n \vec{e}_n \rangle$$

$$= \sum_n u_n \underbrace{\langle \vec{e}_\ell, \vec{e}_n \rangle}_{\hat{=} \, \delta_{\ell n}} = u_\ell$$

hier:

$$f(t) = \sum_n f_n \underbrace{e^{in\omega t}}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{\textless}\!\!\text{ll} & & \text{\textless}\!\!\text{ll} \end{array}$$

$$\underset{\text{Vektor}}{f} = \underset{\text{Linearkombination}}{\sum_n} f_n \underset{\substack{\text{Basisvekt} \\ = \text{Basisfkten}}}{e_n}$$

d.h. „ f_n sind die Komponenten der Fkt. $f(t)$

bzgl. der Basisfunktionen

$$e_n : t \longmapsto e^{in\omega t} \text{"}$$

orthonormal bzgl. eines geeigneten

Skalarproduktes: $\langle \ldots, \ldots \rangle$

$$\rightarrow \quad f_n = \langle e_n, f \rangle \qquad ! \; ? \; !$$