Fourierreihe:

$$\boxed{f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \, e^{in\omega t}}$$

T-periodische Fkt.: $f(t) = f(t+T)$

Fourierkoeffizienten

Problem: $f(t) \longrightarrow f_n = ?$

Idee:

Funktionensystem $\{ e_n : t \mapsto e^{in\omega t} \}_{n\in\mathbb{Z}}$

orthonormal bzgl. geeignetem Skalarprodukt $\langle \ldots, \ldots \rangle$ für Vektorraum der T-periodischen Funktion:

$$\langle e_\ell, e_m \rangle \overset{!}{=} \delta_{\ell n}$$

$\rightarrow$
$$f(t) = \sum_n f_n \, e_n(t)$$

$\rightsquigarrow e^{in\omega t}$

mit "Komponenten" f_n von f bzgl. $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ gegeben durch

$$f_n = \langle e_n, f \rangle \quad !$$

$\ulcorner$

$$f = \sum_m f_m e_n \rightarrow \langle e_\ell, f \rangle = \langle e_\ell, \sum_m f_m e_m \rangle$$

$$= \sum_n f_m \underbrace{\langle e_\ell, e_m \rangle}_{= \delta_{\ell m}} = f_\ell$$

$\lrcorner$

T-periodisch Fkt. ein VR ?

f, g T-periodische Fkt. : $f+g$ T-periodisch ✓

λf " " ✓

hier $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (z.B. $e_n(t) = e^{in\omega t} \in \mathbb{C}$

→ zweckmäßig: erlaube Skalarmultiplikation

mit $\lambda \in \mathbb{C}$

komplexer Vektorraum = Menge V mit Addition

$+ : V \times V \to V$

und Skalarmultiplikation

$\cdot : \mathbb{C} \times V \to V$

$(\lambda, u) \mapsto \lambda u$

Skalarprodukt für komplexen VR

= hermitesches Skalarprodukt :

Abb. $\langle \ldots, \ldots \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$

$u, v \mapsto \langle u, v \rangle$

mit Eigenschaften

(i) Symmetrie :

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle^*$$

(ii) Positivität :

$\langle u, u \rangle > 0 \qquad u \neq 0$

(iii) Linearität:

$$\langle u, v+w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$$

$$\langle u, \lambda v\rangle = \lambda \langle u, v\rangle$$

⚠ $\rightarrow$ $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda^* \langle u, v\rangle$

$$\langle u+w, v\rangle = \langle u, v\rangle + \langle w, v\rangle$$

$$\langle \lambda u, v\rangle = \langle v, \lambda u\rangle^* = (\lambda \langle v, u\rangle)^*$$

$$= \lambda^* \langle v, u\rangle^* = \lambda^* \langle u, v\rangle$$

komm. S.P. für T-per. Fkt. en:

$$\boxed{\langle f, g\rangle := \frac{1}{T}\int_0^T f^*(t)\, g(t)\, dt}$$

S.P.? (i) $\langle g, f\rangle^* = \frac{1}{T}\int_0^T \underbrace{\left(g^*(t)\cdot f(t)\right)^*}_{=\, g(t)\cdot f^*(t)} dt$

$$= \langle f, g\rangle \checkmark$$

(ii) $\langle f, f\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \underbrace{f^*(t)\, f(t)}_{|f(t)|^2 \geq 0} dt \underset{\neq}{>} 0$

(iii) $\langle f, g+h\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f^*(t)\left(g(t)+h(t)\right) dt$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T f^*(t)\, g(t)\, dt + \frac{1}{T}\int_0^T f^*(t)\, h(t)\, dt \checkmark$$

Funktionensystem: $\left\{ e_n : t \mapsto e^{in\omega t} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$

orthonormal bzgl. $\langle \dots , \dots \rangle$ wie oben ??

z.z.: $1 \overset{!}{=} \langle e_n , e_n \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e_n^*(t)\, e_n(t)\, dt$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \underbrace{\left(e^{in\omega t} \right)^*}_{e^{-in\omega t}} e^{in\omega t}\, dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T e^{\underbrace{-in\omega t + in\omega t}_{\overset{!!}{0}}}\, dt = \frac{1}{T} \int_0^T 1\, dt = 1$$

$0 \overset{?}{=} \langle e_l , e_n \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-il\omega t} e^{in\omega t}\, dt$

$l \neq n$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\underbrace{(n-l)}_{m \neq 0}\omega t}\, dt \quad ; \quad T = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\overset{\uparrow}{=} \frac{T}{2\pi m} \cdot \frac{1}{T} \int_0^{2\pi m} e^{ix}\, dx$$

$t = \frac{x\, T}{2\pi m} = \frac{x}{\omega m}$

$\left(T = \frac{b\, T}{2\pi m} \right)$

$\rightarrow b = 2\pi m$

$$= \frac{1}{2\pi m} \int_0^{2\pi m} \left(\cos x + i \sin x \right) dx = 0$$

$\rightarrow$ d.h.: mit $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e_n$

$\rightarrow$ $f_n = \langle e_n , f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \underbrace{e_n(t)^*}_{e^{-in\omega t}} f(t)\, dt$

$$f_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt$$

2) **Satz**:

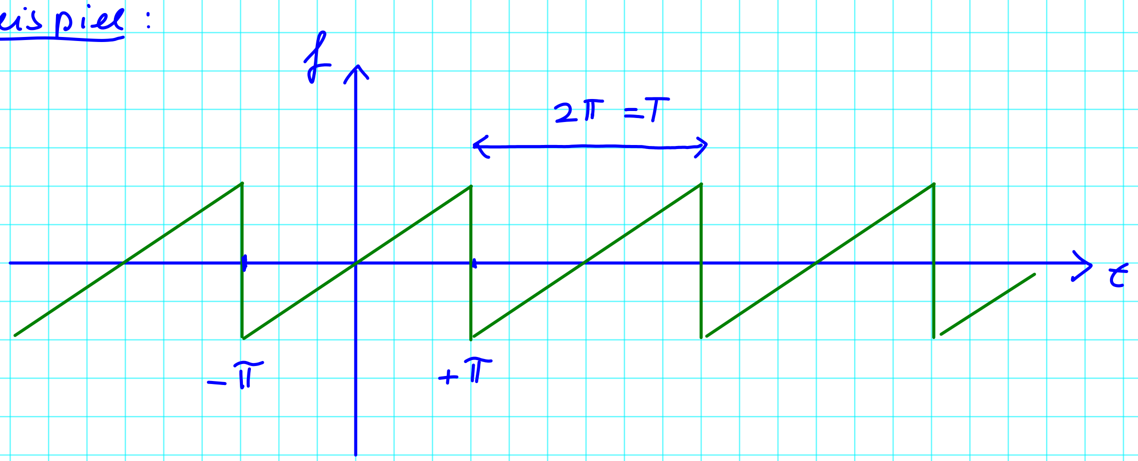
Eine T-period. Fkt. $f(t)$ kann durch eine Fourierreihe

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \, e^{in\omega t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

dargestellt werden. Die n-te Fourier-komponente ist geg. durch

$$f_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \, e^{-in\omega t} \, dt$$

Beispiel:



$$f(t) = t \quad \text{für } t \in \,]-\pi, \pi[\,, \quad \rightarrow T = 2\pi$$

$$\rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 1$$

$$\rightarrow \quad f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \, e^{int}$$

$$\text{mit} \quad f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} t \, e^{-int} \, dt = \begin{cases} 0 : & n = 0 \\ \frac{i}{n} (-1)^n : & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} f_n e^{int}$$

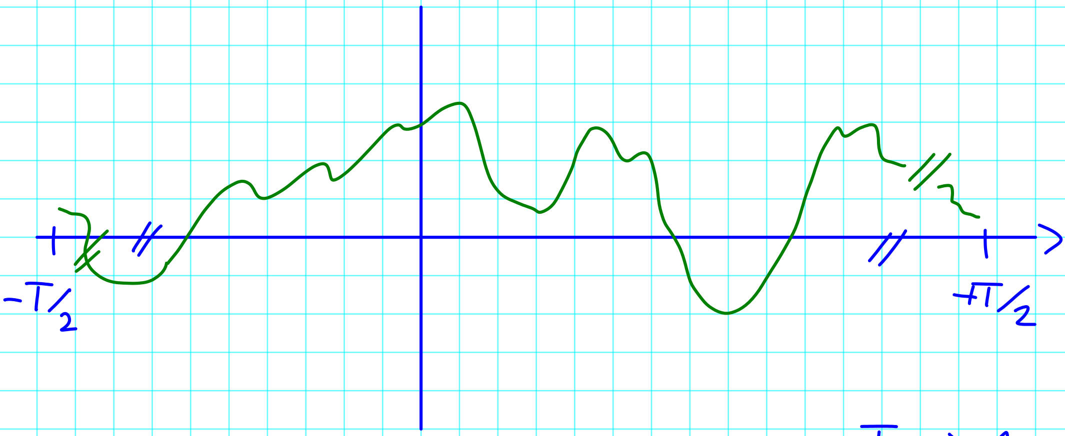
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(f_n e^{int} + f_{-n} e^{-int} \right)}_{\underbrace{\frac{i}{n}(-1)^n e^{int} - \frac{i}{n}(-1)^n e^{-int}}_{\frac{i}{n}(-1)^n \underbrace{\left(e^{int} - e^{-int} \right)}_{2 i \sin(nt)}}}$$

$$\rightarrow \quad f(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \sin(nt)$$

$$= 2 \sin(t)/1 - 2 \sin(2t)/2 + 2 \sin(3t)/3$$

$$- 2 \sin(4t)/4 + \dots - \dots$$

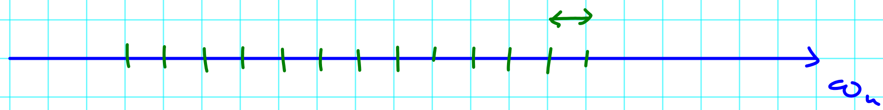
Fouriertransformation einer Fkt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$



$T \to \infty$

$\to \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \to 0 \quad ; \quad n \cdot \omega \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$

$\to \quad \omega_n := n\omega$ $\qquad \Delta\omega = 2\pi / T$



$$\to \quad \sum_n f_n \, e^{i\omega_n t} \xrightarrow[T \to \infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \hat{f}(\omega) \, e^{i\omega t}$$

Fouriertransformation:

$$f(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \underline{\hat{f}(\omega)} \, e^{i\omega t}$$

$$\text{mit} \quad \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, e^{-i\omega t} \, dt$$