

letzte Woche:

- Vektor $\in$ Vektorraum = Menge mit Addition (A1-A4) und Skalarmultiplikation (S1-S4)

- Linearkombination

der Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V$:

$$\boxed{\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n \in V}$$

$\lambda_i \in \mathbb{R}$

Vektorsystem $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V$ ist

- linear unabhängig g.d.w.

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0} \Rightarrow \lambda_i = 0$$

für alle i

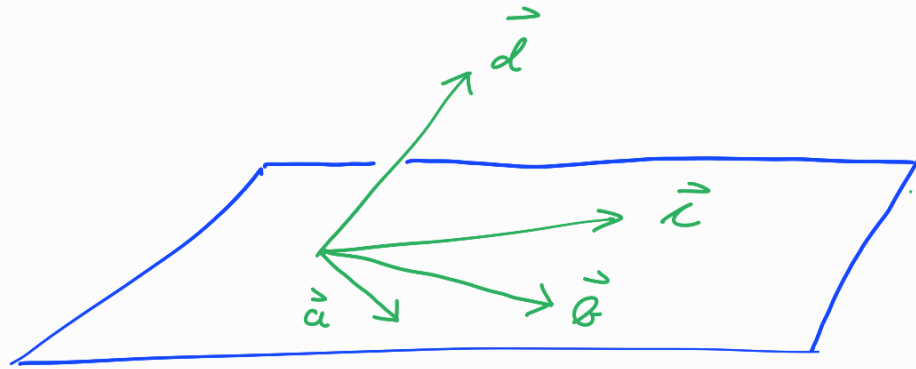
- vollständig (ein Erzeugendensystem)

g.d.w. jeder Vektor $\vec{u} \in V$ als

L.K. dargestellt werden kann:

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$$

Beispiel :



System	lin. unabh.	vollst.
$\vec{a}, \vec{b}$	✓	—
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$	—	—
$\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$	✓	✓
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$	—	✓

→ Basis = vollständiges und zugleich
lin. unabhängiges Vektorsyst.

$$\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$$

→ eindeutige Basisdarstellung :

$$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + \dots + u_n \vec{e}_n =: \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}_B$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow$
Komponenten des VPs $\vec{u}$ bzgl. Basis B

Vereinfachung der Notation:

Summenzeichen: " $\sum$ " "Sigma":

Summe:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k =: \sum_{n=1}^k a_n$$

↑
Summanden aus $\mathbb{R}$, $\mathbb{V}\mathbb{R}$

Bsp:

$$\bullet \sum_{n=1}^k 1 = 1 + 1 + \dots + 1 = k$$

|
 $a_n = 1$

$$\bullet \sum_{n=1}^{100} n = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$$

|
 $a_n = n$

$$= 50 \cdot 101 = 5050$$

$$\bullet \sum_{n=1}^k n = \frac{k}{2} (k+1)$$

$$\cdot \quad \vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + \dots + u_n \vec{e}_n$$

$$= \sum_{i=1}^n u_i \vec{e}_i = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}_B$$

Kronecker-Delta:

$$\delta_{nm} := \begin{cases} 1 & : n=m \\ 0 & : n \neq m \end{cases}$$

Bsp:

$$\circ \quad \sum_{n=1}^{100} n^2 \delta_{n5} = 25$$

$$\circ \quad \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 \delta_{nm}) = n^2 \quad n \geq 1$$

Doppelsummen

Doppelsumme:

$$\begin{aligned}\sum_{n,m=1}^k a_{nm} &:= \sum_{\substack{n=1 \\ \text{grün}}}^k \sum_{\substack{m=1 \\ \text{rot}}}^k a_{\text{grün } n, \text{rot } m} \\ &= \sum_{n=1}^k (a_{n1} + a_{n2} + \dots + a_{nk}) \\ &= a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1k} \\ &\quad + a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2k} \\ &\quad \vdots \\ &\quad + a_{k1} + a_{k2} + \dots + a_{kk}\end{aligned}$$

Bsp :

$$\sum_{n,m=1}^k 1 = k^2$$

$a_{nm} = 1$

$$\begin{aligned}\left[\sum_{n,m=1}^k 1 \right] &= \sum_{n=1}^k \overbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}^k \\ &= \underbrace{k + k + \dots + k}_k = k^2 \quad \checkmark\end{aligned}$$

$$\bullet \sum_{n,m=1}^K \delta_{nm} = \sum_{n=1}^K \underbrace{\sum_{m=1}^K \delta_{nm}}_1 = K \quad \checkmark$$

$$\sum_{n=1}^K \sum_{m=1}^L a_{nm} = \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^K a_{nm}$$

$$\left[\sum_{n=1}^K n = 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} \dots \right.$$

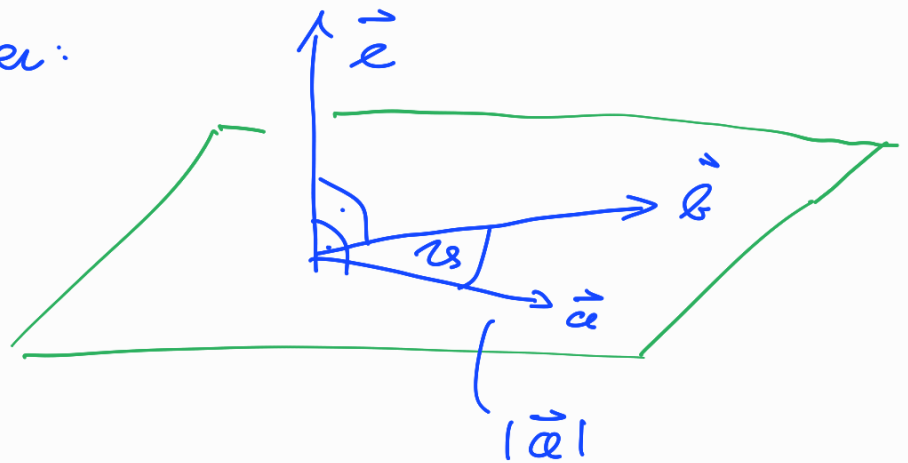
$n=1:$
 $\Delta n = \frac{1}{2}$

$$= \sum_{n=1}^{2K} \frac{n}{2} \dots \left]$$

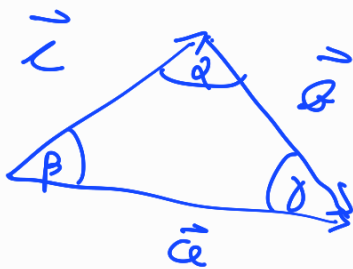
$$\sum_{n=-10}^{100} n = -10 + (-9) \dots + 100 \quad \left]$$

nächstes Thema: "Vektoren / Vektorräume
mit Geometrie":

z.B. Translokieren:



- Winkel $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{e})$
- Länge $|\vec{a}|$
- Orthogonalität: $\vec{e} \perp \vec{a}$
- Gesetze der euklidischen Geometrie:



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\angle(\vec{e}, \vec{e}) + \angle(\vec{a}, \vec{e}) + \angle(\vec{a}, \vec{e})$$

Satz des Pythagoras:



$$a^2 + b^2 = c^2$$

" "

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$$

→ hier Geometrie für allg. VR
(insb. Translationen) mittels

Skalarprodukt → Grundbegriffe

→ eukl. Geometrie!

Def. Ein Skalarprodukt eines VR V
ist eine Abb. $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

$$\vec{a}, \vec{b} \mapsto \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

mit Eigenschaften

$$(SP1) \quad \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle \quad (\text{Symmetrie})$$

$$(SP2) \quad \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle > 0 \quad \vec{a} \neq \vec{0} \quad (\text{Positivität})$$

$$(SP3) \quad \begin{aligned} \langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{c} \rangle &= \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \\ \langle \vec{a}, \lambda \vec{b} \rangle &= \lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \end{aligned} \quad (\text{Linearität})$$

Def. Ein Skalarprodukt eines VR V

ist eine Abb. $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

$$\vec{a}, \vec{b} \longmapsto \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

mit Eigenschaften

$$(SP1) \quad \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle \quad (\text{Symmetrie})$$

$$(SP2) \quad \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle > 0 \quad \vec{a} \neq \vec{0} \quad (\text{Positivität})$$

$$(SP3) \quad \begin{aligned} \langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{c} \rangle &= \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \\ \langle \vec{a}, \lambda \vec{b} \rangle &= \lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \end{aligned} \quad (\text{Linearität})$$

Notation:

$$\text{s.d.} \quad \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \underset{\equiv}{=} \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) \dots$$

VR mit Skalarprodukt $\equiv$ euklidischer
VR

Bsp: $V \mathbb{R} \mathbb{R}^n$ mit sog. Standard Skalarprodukt

$$\begin{array}{ccc} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle & := & \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \\ \downarrow & & \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{array}$$

erfüllt offenbar (SP1) - (SP3) ✓

Grundbegriffe: $(\vec{a}, \vec{b} \in V, \langle \dots, \dots \rangle \text{ s.r.})$

- Norm (Länge, Betrag) eines Vektors $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| := (\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle)^{1/2}$$

- Orthogonalität

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \text{g.d.w.} \quad \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$$

„ $\vec{a}$ orthogonal $\vec{b}$ “,

Bemerkungen, Anwendungen:

1) Linearität (SP3) $\langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$

$$\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{SP1} &= \langle \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} \rangle_{SP3} = \langle \vec{c}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{c}, \vec{b} \rangle \\ &= \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle_{SP1} + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \end{aligned}$$

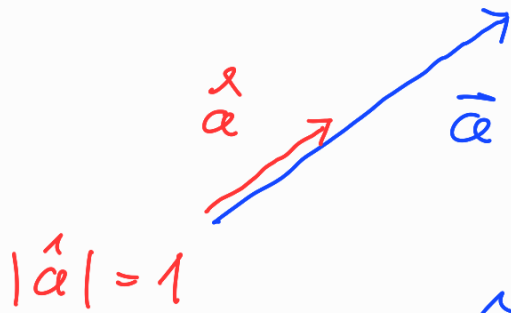
analog: $\langle \lambda \vec{a}, \vec{b} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

2) $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}| \quad \checkmark$

$$\begin{aligned} \Gamma &\hookrightarrow (\langle \lambda \vec{a}, \lambda \vec{a} \rangle)^{1/2} = (\lambda^2 \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle)^{1/2} \\ &= |\lambda| \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle^{1/2} = |\lambda| |\vec{a}| \quad \checkmark \end{aligned}$$

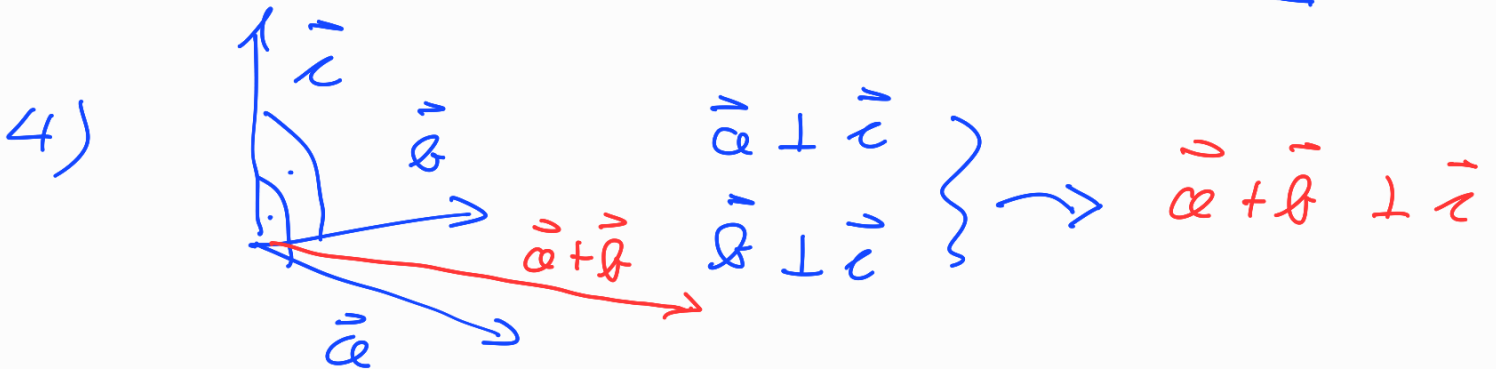
3)

3) Richtungsvektor $\hat{a}$ des Vektors $\vec{a}$:



$$\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$$

$$\Gamma \quad |\hat{a}| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \right| = \frac{1}{|\vec{a}|} |\vec{a}| = 1 \quad \Gamma$$



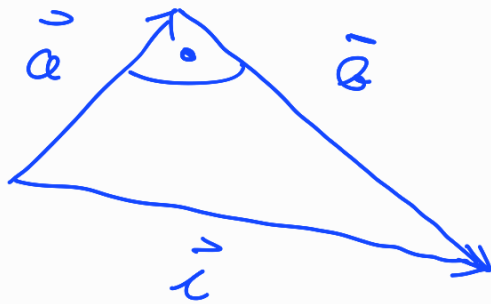
$$\vec{a} \perp \vec{c} \rightarrow \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = 0$$

$$\vec{a} + \vec{b} \perp \vec{c} \rightarrow \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0$$

z.B. $\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0$ ✓

$$\hookrightarrow \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle}_0 + \underbrace{\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle}_0 = 0$$

4) Satz des Pythagoras:



$$\bullet \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \quad (1)$$

$$\bullet \vec{a} \perp \vec{b} \leadsto \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \quad (2)$$

Beh.:

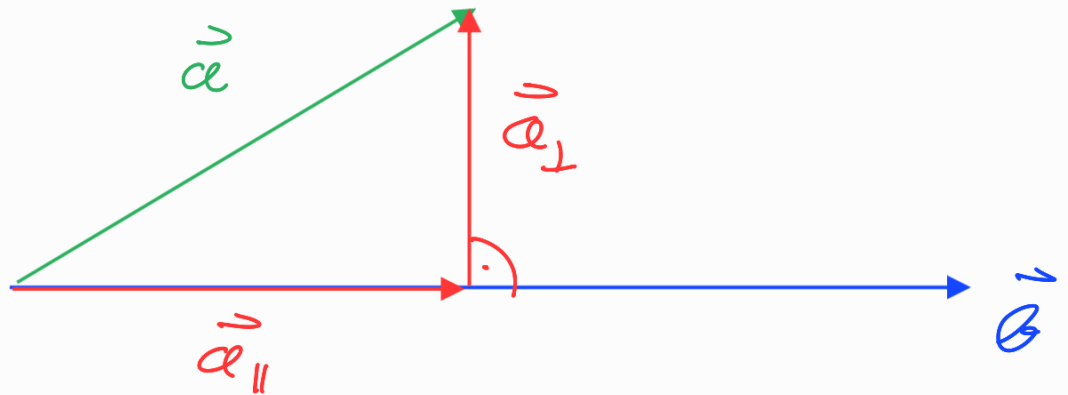
$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$$

$$\uparrow \text{ n. S. } = |\vec{c}|^2 = \langle \vec{c}, \vec{c} \rangle \stackrel{(1)}{=} \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} \rangle$$

$$= \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}_{(SP3) \quad = |\vec{a}|^2} + \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}_{\stackrel{(2)}{=} 0} + \underbrace{\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle}_{\stackrel{(2)}{=} 0} + \underbrace{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle}_{= |\vec{b}|^2}$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \quad \checkmark$$

5) Zerlegung in Parallel und Orthogonal-
komponente:



Beh.:

$$\vec{a}_{\parallel} = \langle \hat{b}, \vec{a} \rangle \hat{b}$$

$$\vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \vec{a}_{\parallel}$$

z.z: $\vec{a}_{\perp} \perp \hat{b} \rightarrow 0 \stackrel{!}{=} \langle \vec{a}_{\perp}, \hat{b} \rangle$

$$\langle \vec{a}_{\perp}, \hat{b} \rangle = \langle \vec{a} - \vec{a}_{\parallel}, \hat{b} \rangle = \langle \vec{a}, \hat{b} \rangle - \langle \vec{a}_{\parallel}, \hat{b} \rangle$$

$$= \langle \vec{a}, \hat{b} \rangle - \langle \langle \hat{b}, \vec{a} \rangle \hat{b}, \hat{b} \rangle =$$

$$\vec{a}_{\parallel} = \langle \hat{b}, \vec{a} \rangle \hat{b}$$

$$= \langle \vec{a}, \hat{b} \rangle - \langle \vec{a}, \hat{b} \rangle \underbrace{\langle \hat{b}, \hat{b} \rangle}_{=1} = 0 \quad \checkmark$$