

Wiederholung:

$$\underline{\text{Skalarprodukt}} = \text{Abb. } V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\vec{a}, \vec{b} \mapsto \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

mit Eigenschaften

$$(SP1) \quad \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle \quad (\text{Symmetrie})$$

$$(SP2) \quad \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle > 0 \quad (\text{Positivität})$$
$$\vec{a} \neq \vec{0}$$

$$(SP3) \quad \langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$$

$$\langle \vec{a}, \lambda \vec{b} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

$$\leadsto \underline{\text{Norm}}: \quad |\vec{a}| := (\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle)^{1/2}$$

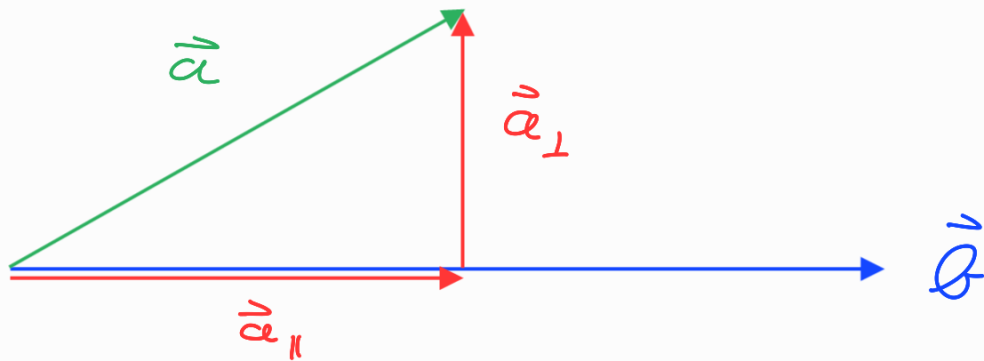
Orthogonalität:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \text{g.d.w.} \quad \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$$

$\leadsto$ euklidische Geometrie!

(VR mit S.P. $\equiv$ euklidischer VR) ..

z. B. Parallel- und Orthogonalkomponente:



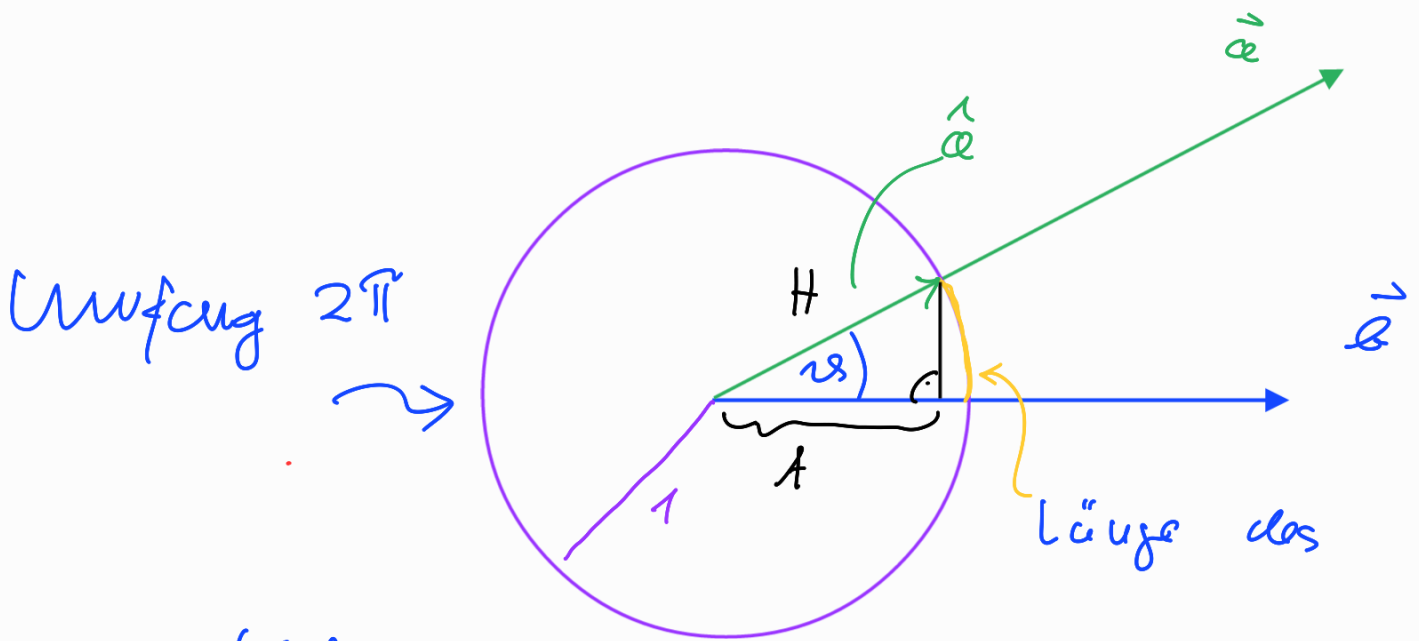
$$\vec{a}_{\parallel} = \langle \hat{b}, \vec{a} \rangle \hat{b}$$

$$\hat{b} = \vec{b} / |\vec{b}|$$

→ geometr. Bedeutung des Skalarprodukts:

$\langle \hat{b}, \vec{a} \rangle$ ist Länge der Projektion!

Winkel zwischen Vektoren

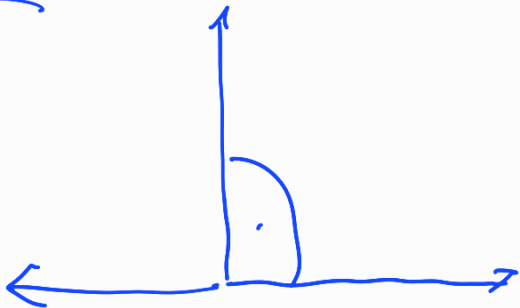


geometrisch:

Bogenstücks

=: Winkel α im
Bogenmaß!

Beispiele:



Grad

Bogenmaß

$$90^\circ \hat{=} \pi/2$$

$$180^\circ \hat{=} \pi$$

$$360^\circ = 2\pi$$

$$45^\circ = \pi/4$$

$\vdots$

$$\cos \vartheta = \frac{A}{H} = A$$

$$H = 1$$

mit $A = \langle \hat{b}, \hat{a} \rangle$

$$\hat{a} = \vec{a} / |\vec{a}|$$

$$\hat{b} = \vec{b} / |\vec{b}|$$

$$\rightarrow \cos \vartheta = \langle \hat{b}, \hat{a} \rangle = \frac{\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle}{|\vec{b}| |\vec{a}|}$$

2. geometrische Def. des S.P.s :

$$\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle = |\vec{b}| |\vec{a}| \cos \vartheta$$

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) \equiv \vartheta$$

wegen $|\cos \vartheta| \leq 1$

$$|\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle| = |\vec{b}| |\vec{a}| |\cos \vartheta| \leq |\vec{b}| |\vec{a}|$$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

Orthonormalbasis eines eukl. VRS

Def.: Eine Basis $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ eines eukl. VRS V ist eine Orthonormalbasis (ONB) wenn die Basisvektoren normiert und paarweise orthogonal sind. D.h.:

$$(i) \quad |\vec{e}_i| = 1 \quad i = 1, \dots, n$$

$$(ii) \quad \vec{e}_i \perp \vec{e}_j \quad i \neq j$$

gleichbedeutend mit

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases}$$

mit Kronecker-Delta:

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$$

!

Skalarprodukt in komponenten bezgl. ONB B

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}_B$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n a_i \underline{\vec{e}_i}, \sum_{j=1}^n b_j \underline{\vec{e}_j} \right\rangle$$

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n a_i \vec{e}_i$$

$$\vec{b} = \sum_{j=1}^n b_j \vec{e}_j$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \langle a_i \vec{e}_i, b_j \vec{e}_j \rangle$$

$$= \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \underbrace{\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle}_{= \delta_{ij}} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

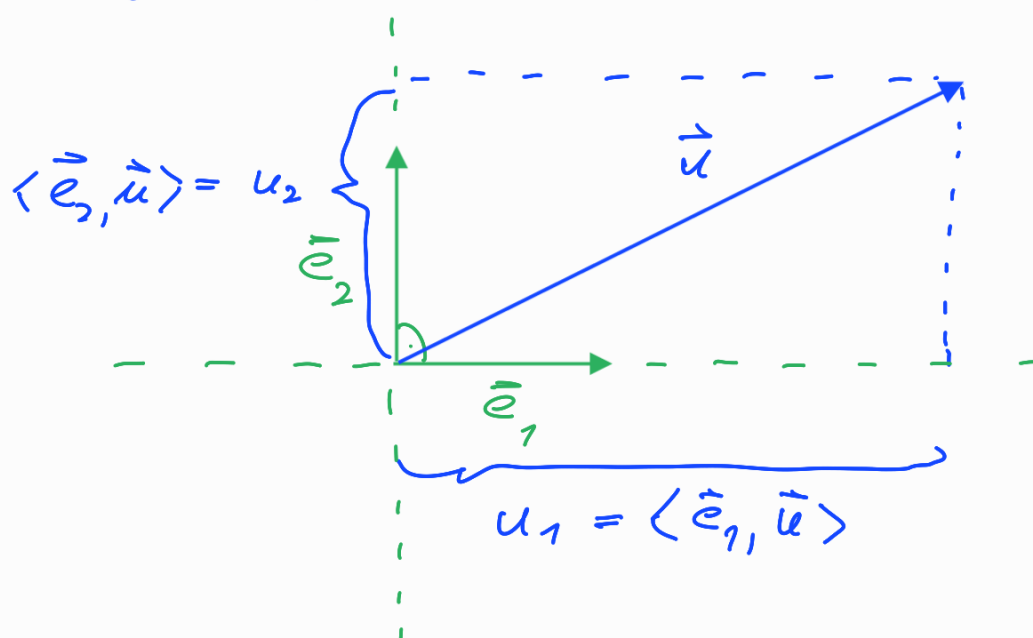
Bestimmung der Komponenten eines Vektors

$\vec{u}$ bzgl. einer ONB $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$

Beh.

$$u_i = \langle \vec{e}_i, \vec{u} \rangle$$

Γ geometrisch: $n=2$



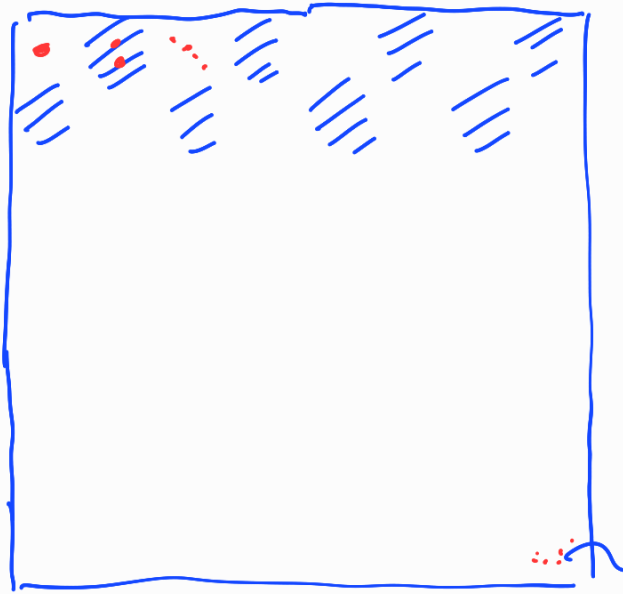
formal: $\vec{u} = \sum_{j=1}^n u_j \vec{e}_j$?

$$\begin{aligned} \underline{\langle \vec{e}_i, \vec{u} \rangle} &= \langle \vec{e}_i, \sum_{j=1}^n u_j \vec{e}_j \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \langle \vec{e}_i, u_j \vec{e}_j \rangle = \sum_{j=1}^n u_j \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = u_i \end{aligned}$$

The diagram shows the formal derivation of the component formula. The inner product $\langle \vec{e}_i, \vec{u} \rangle$ is equated to $\langle \vec{e}_i, \sum_{j=1}^n u_j \vec{e}_j \rangle$. This is then expanded to $\sum_{j=1}^n \langle \vec{e}_i, u_j \vec{e}_j \rangle$, which simplifies to $\sum_{j=1}^n u_j \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle$. The inner product $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle$ is identified as δ_{ij} (Kronecker delta), which is 1 if $i=j$ and 0 otherwise. This results in u_i .

Exkurs: Geometrische Summe:

Sissa :



Wieviel Weizenkörner erhält Sissa?
A

$$A = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots =$$

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} =$$

$$= \sum_{n=0}^{63} 2^n \stackrel{(*)}{=} \longrightarrow = \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = \underline{\underline{2^{64} - 1}}$$

$\hookleftarrow N=63, q=2$

$\rightarrow$ geometrische Summe / Reihe:

$$\sum_{n=0}^N q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

$(*)$ $(q \neq 1)$

geometrische Summe / Reihe:

$$\sum_{n=0}^N q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

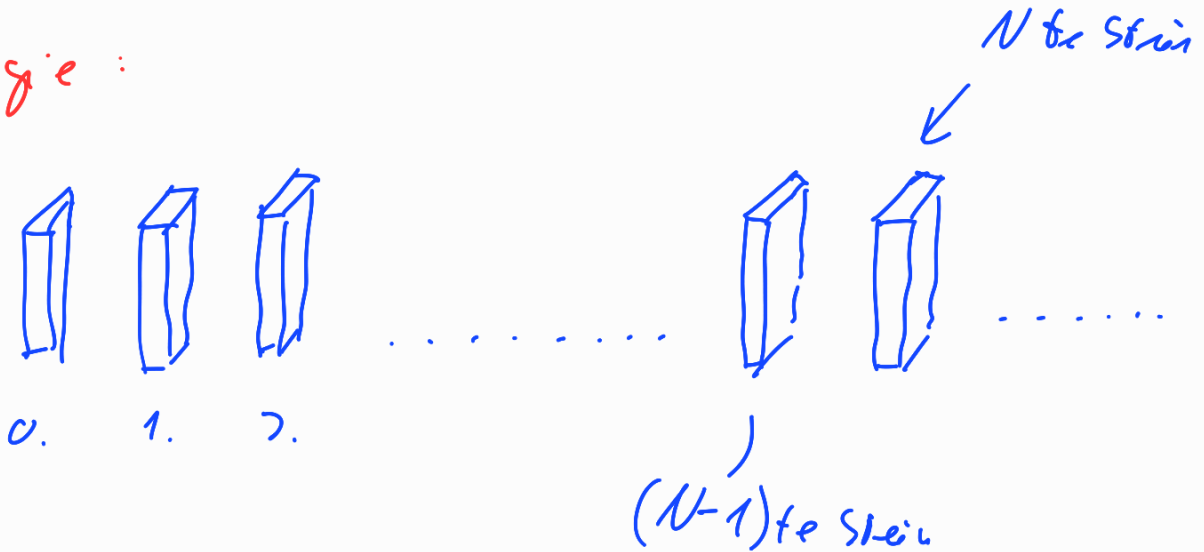
(*)

($q \neq 1$)



Beweis! durch vollständige Induktion
über N ! ?

Induktion:



(i) fällt der $(N-1)$ te Stein, dann auch
der N te Stein

(ii) der 0. Stein fällt

(i) und (ii) $\Rightarrow$ alle Steine sind gefallen!

für große Summe:

$$\sum_{n=0}^N q^n \stackrel{!}{=} \frac{1-q^{N+1}}{1-q} \quad !$$

($q \neq 1$)

(ii) Induktionsbasis: $N=0$!

$$\sum_{n=0}^0 q^n = q^0 = 1 \stackrel{!}{=} \frac{1-q^{0+1}}{1-q} = \frac{1-q}{1-q} \quad \checkmark$$

(i) Induktionsschritt $(N-1) \rightarrow N$:

Induktionsvoraussetzung: Aussage wahr für $N-1$!

$$\text{d.h.} \quad \sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1-q^N}{1-q} \quad \checkmark$$

Zeige damit Aussage für N :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N q^n &= \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{N-1} q^n \right)}_{\text{I. V.}} + q^N = \frac{1-q^N}{1-q} + q^N \\ &= \frac{\cancel{1-q^N} + \cancel{q^N} - q^{N+1}}{1-q} = \frac{1-q^{N+1}}{1-q} \end{aligned}$$

□

→ Anzahl Kistenkörner:

$$\begin{aligned} A &= 2^{64} - 1 \approx 2^{64} = 2^{10 \cdot 6 + 4} \\ &= (2^{10})^6 \cdot 2^4 \\ &= (10^3)^6 \cdot 16 = 16 \cdot 10^{18} = 1,6 \cdot 10^{19}! \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m &= 40 \text{ ng} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ g} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \\ &= 4 \cdot 10^{-9} \text{ t} \end{aligned}$$

$$\rightarrow M = 4 \cdot 1,6 \cdot 10^{10} \text{ t}!$$

