

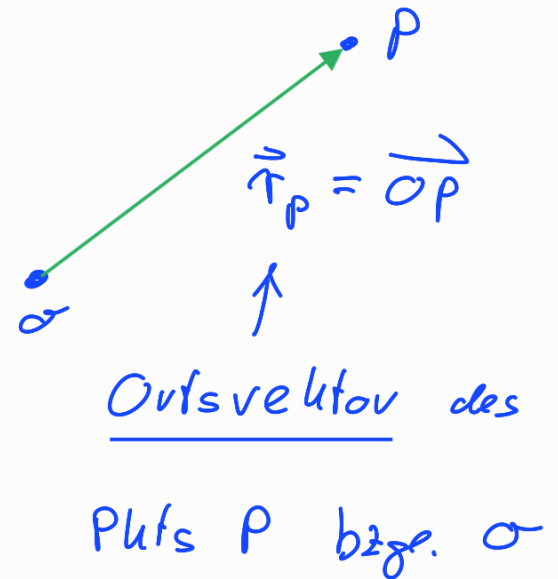
Koordinatensysteme

Kartesisches Koordinatensystem:

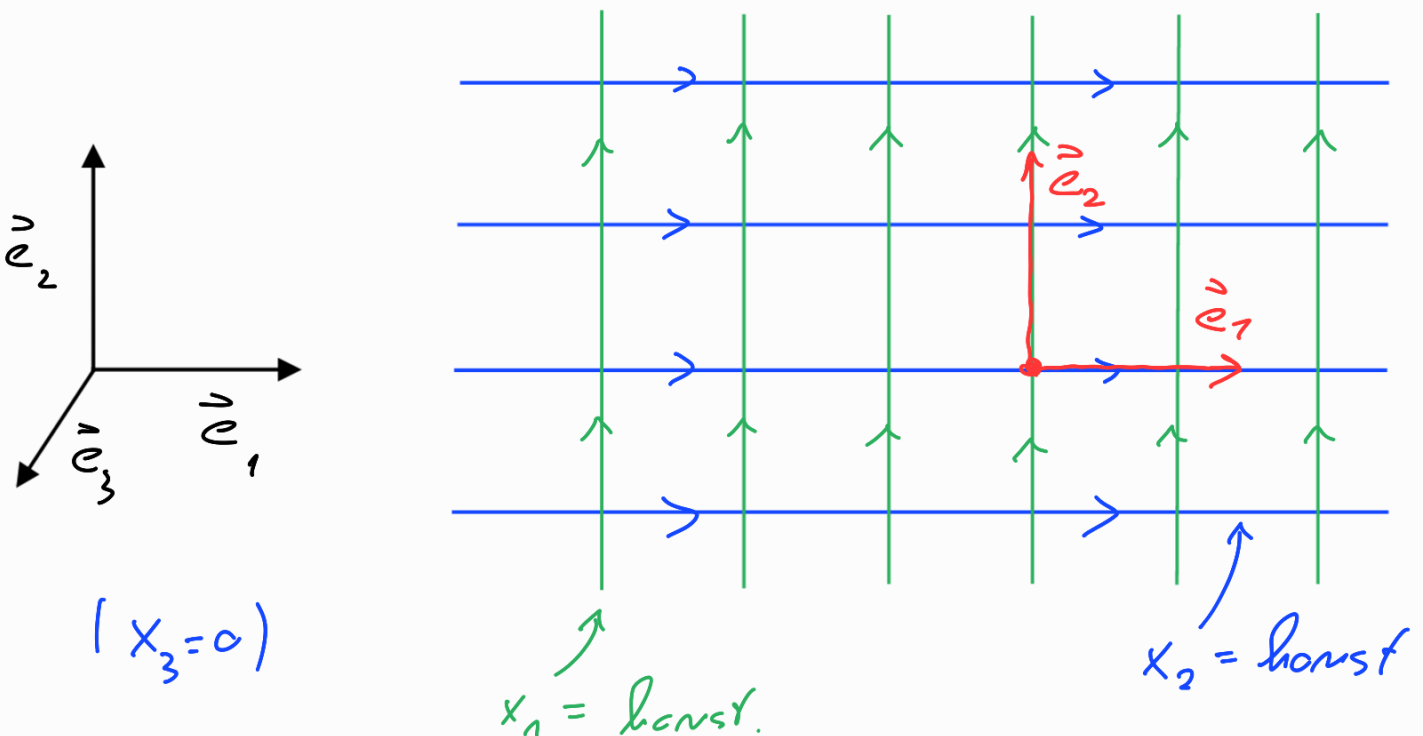
- Bezugspkt. / Ursprung σ
- ONB $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

$$\vec{r}_P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B$$

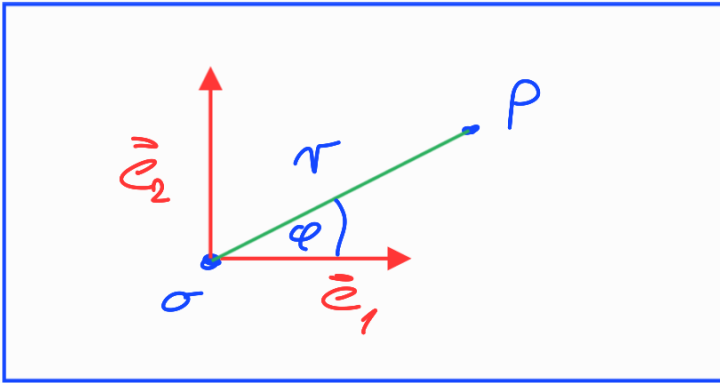
↑
Kartesische Koordinaten des
Pkts. P bzgl. σ und ONB B



Koordinatenlinien:



Polar koordinaten für Pkte in der Ebene



Bsp. pkt. σ

Polarkoordinaten von P :

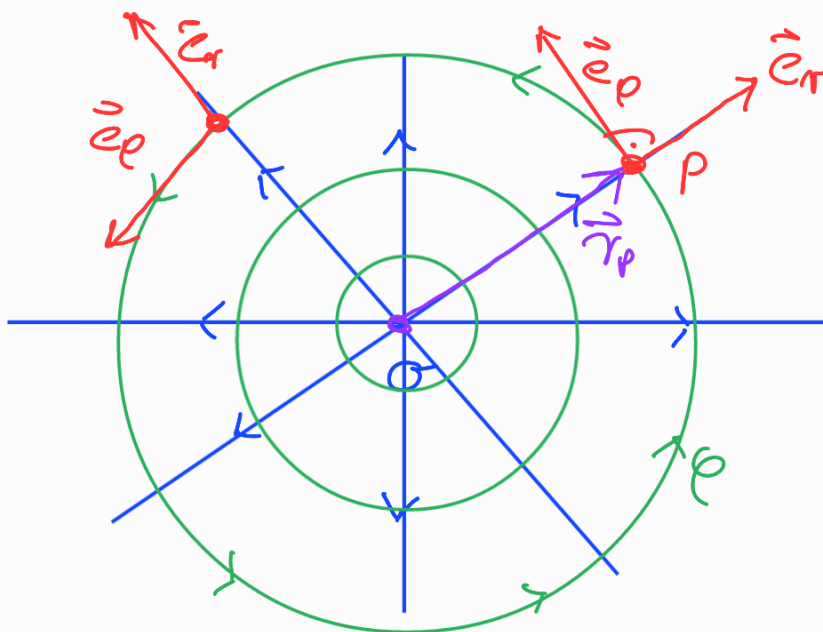
- Radius $r \in \mathbb{R}_+$
 - Winkel $\varphi \in [0, 2\pi[$
- } $\rightarrow (r, \varphi)$

Wechsel zu kart. Koordinaten:

$$(r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_p = r \vec{e}_r$$

Koordinatenlinien:

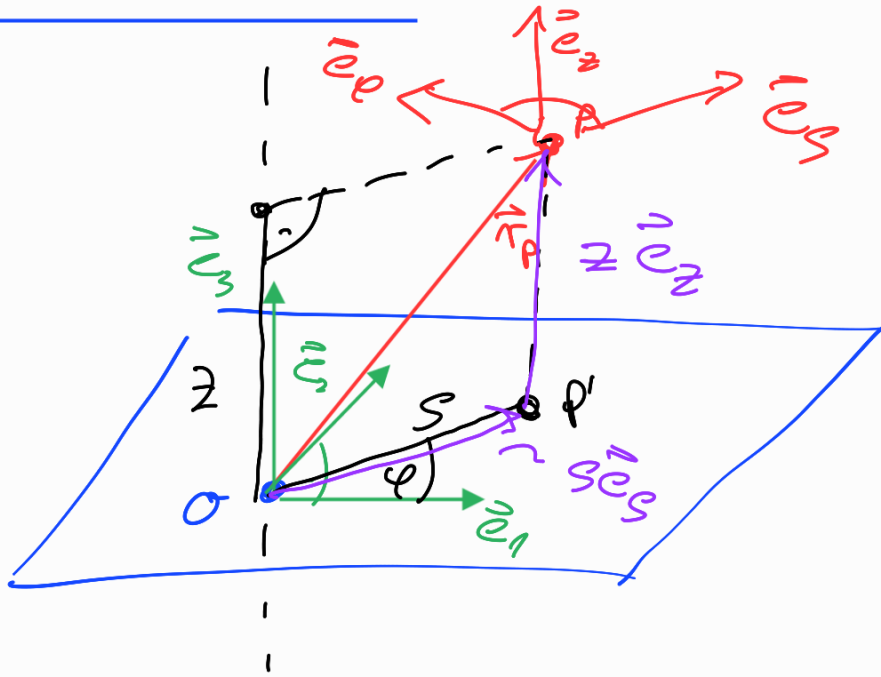


lokale ONB

$$B_{r,\varphi} = (\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$$

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

zylindrische Koordinaten (= Polarkoordinaten + z-Koordinate)



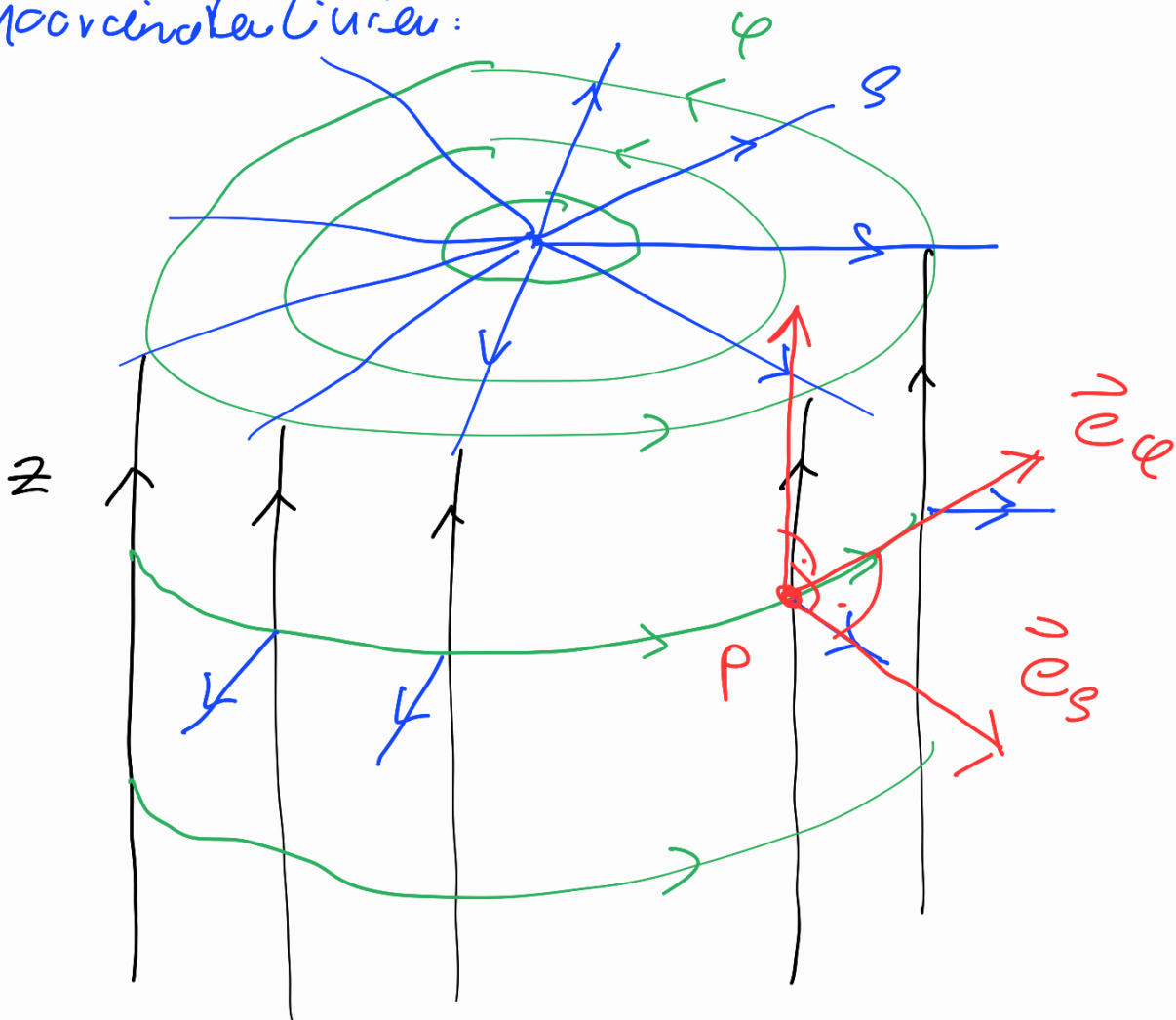
zylindrische Koordinaten von P:

- Radius $s \in \mathbb{R}_+$
 - Winkel $\varphi \in [0, 2\pi[$
 - Höhe $z \in \mathbb{R}$
- } (s, φ, z)

Wechsel zu kart. Koordinaten:

$$(r, \varphi, z) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cos \varphi \\ s \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Koordinatenlinien:



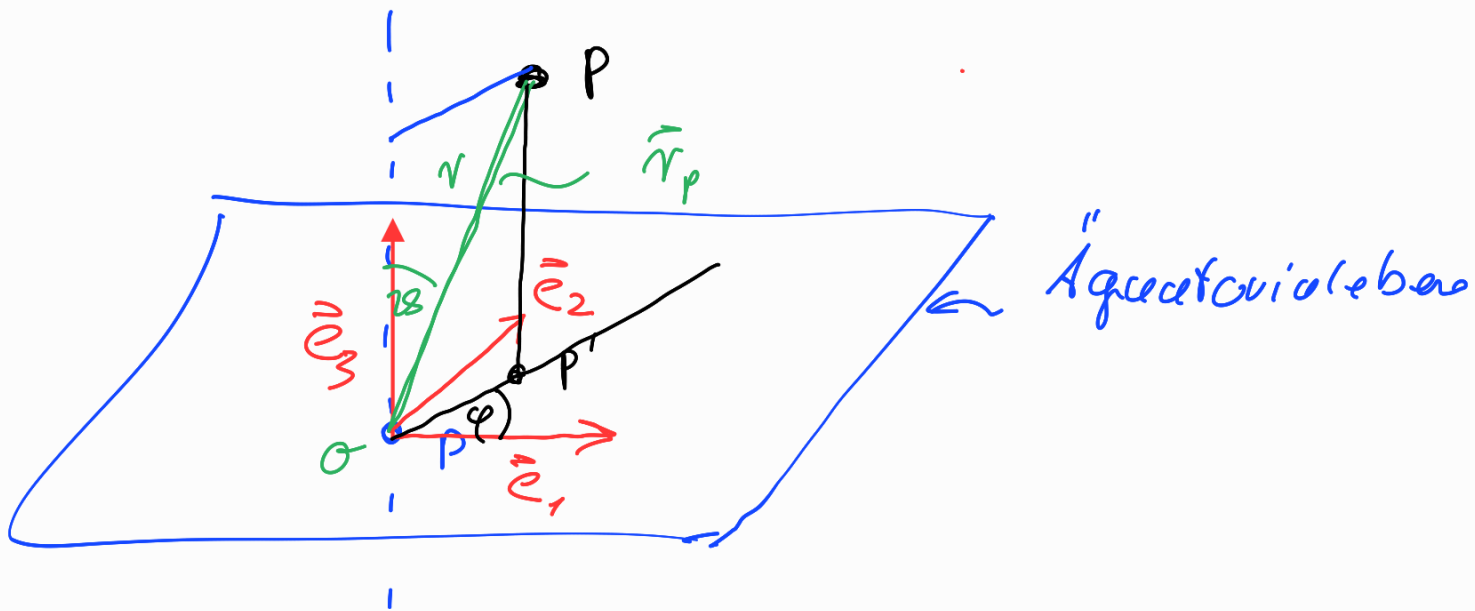
lokale ONB $B_{\vartheta, \varphi, z} = (\vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$

$$\vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gesamtvektor:

$$\vec{r}_P = r \vec{e}_\vartheta + z \vec{e}_z$$

Kugelkoordinaten (sphärische Koordinaten)



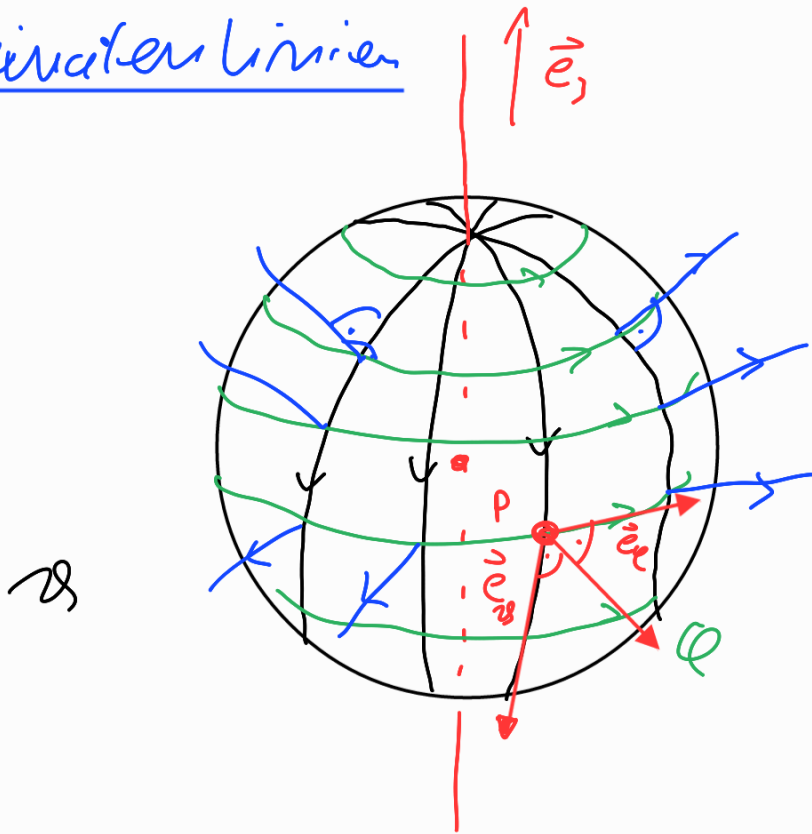
Kugelkoordinaten von P :

- Radius $r \in \mathbb{R}_+$
 - Polwinkel $\vartheta \in [0, \pi]$
 - Azimutwinkel $\varphi \in [0, 2\pi[$
- (r, \vartheta, \varphi)

Wechsel zu kart. Koordinaten

$$(r, \vartheta, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Koordinatenlinien



lokale ONB $B = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\phi \\ \sin\theta \sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\phi \\ \cos\theta \sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

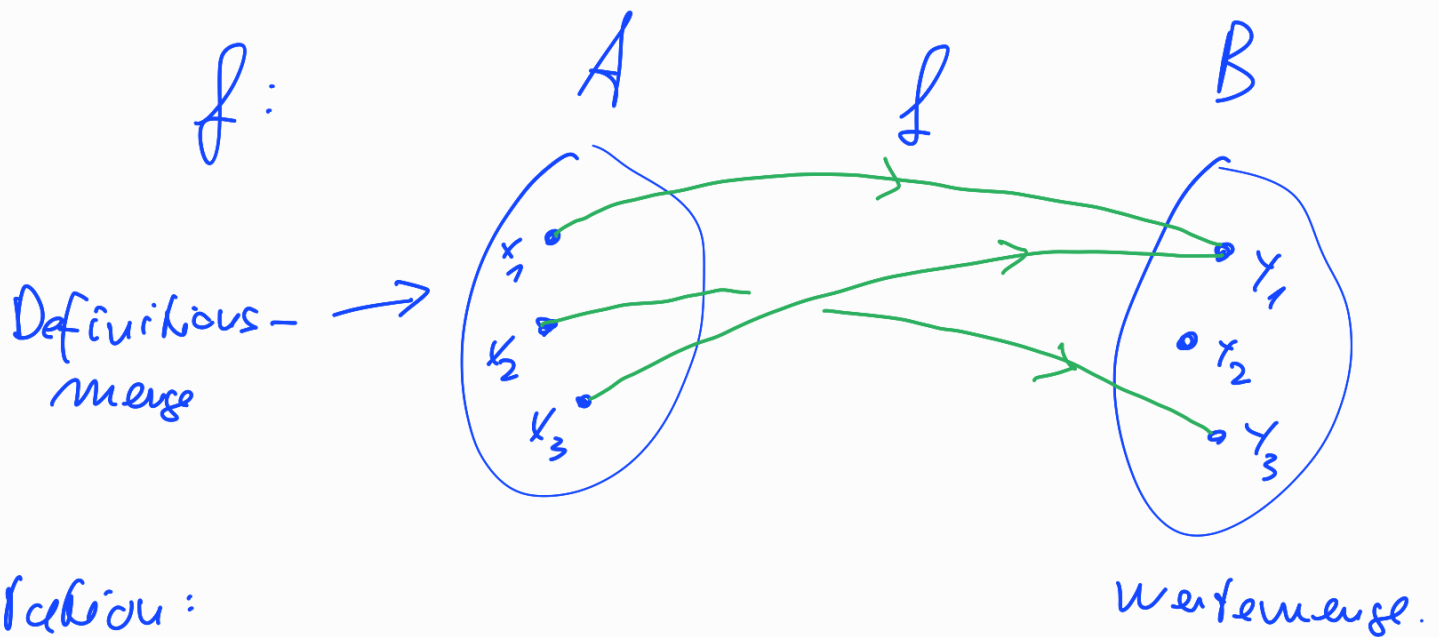
Ortsvektor:

$$\vec{r} = r \vec{e}_r$$



Elemente der Analysis

zuerst: Abbildungen ($\equiv$ Funktionen)



$$f: A \longrightarrow B$$
$$x \longmapsto f(x) := \dots$$

↑
Zuordnungsvorschrift

Berechnungen:

sei $y = f(x)$ dann:

- y ist Bild von $x_{\in A}$ unter Abb f
- x ist ein Urbild von y unter Abb f

Beispiele:

1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) := x^2$$

2) Skalarprod. $\langle \dots, \dots \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

$$(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \dots$$

3) Kreuzprod. $\dots \times \dots: V \times V \rightarrow V$

$$(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} \times \vec{b} = \dots$$

4) Permutation $\sigma: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$

„Sigma“

$$1 \mapsto 2 = \sigma(1) = \sigma_1$$

$$2 \mapsto 3 = \sigma(2) = \sigma_2$$

$$3 \mapsto 1 = \sigma(3) = \sigma_3$$

5) identische Abbildung (Identität)

$$\text{id}_M: M \rightarrow M$$

$$x \mapsto x$$

Surjektivität, Injektivität, Bijektivität

Abbildung $f: A \rightarrow B$ ist

surjektiv : $\Leftrightarrow$ jedes $y \in B$ besitzt

mindestens ein Urbild $x \in A$

injektiv : $\Leftrightarrow$ jedes $y \in B$ besitzt

höchstens ein Urbild $x \in A$

bijektiv : $\Leftrightarrow$ jedes $y \in B$ besitzt

genau ein Urbild $x \in A$

$\Leftrightarrow$ f zugleich surjektiv
und injektiv

Beispiele 1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) = x^2$

surjektiv ? $\ominus$

injektiv ? $\ominus$

bijektiv ? $\ominus$

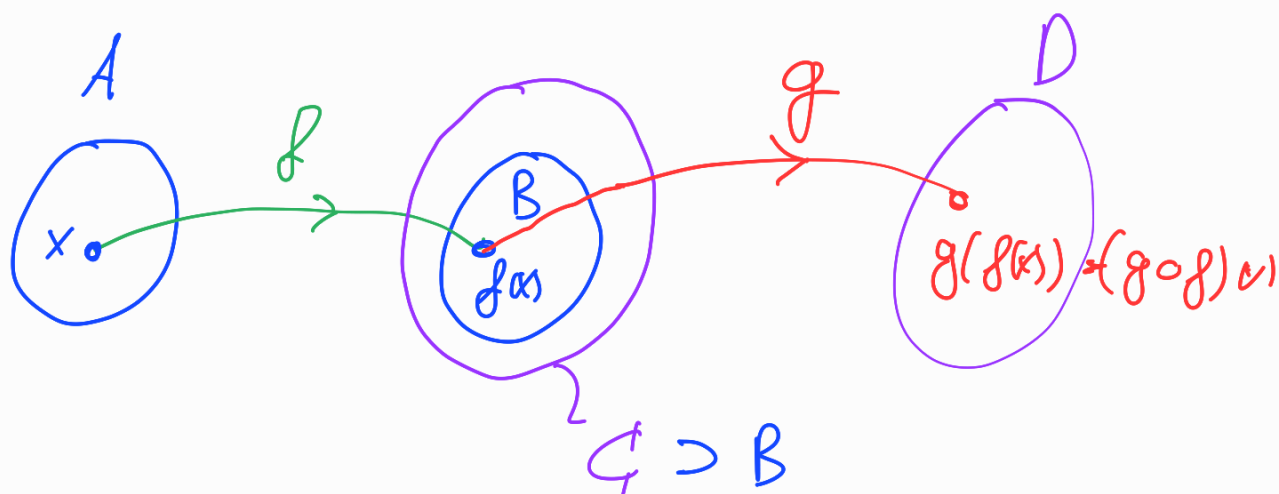
2) S. P. $\langle \dots, \dots \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$
 $(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

surjektiv? $\checkmark$

injektiv? $\ominus$

bijektiv? $\ominus$

Def. Verkettung / Komposition von Abb. en



"g nach f"

$$g \circ f : A \rightarrow D$$

$$x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

Bsp:

$$\sigma: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$$

$$1 \mapsto 2$$

$$2 \mapsto 3$$

$$3 \mapsto 1$$

$$\tau: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$$

$$1 \mapsto 3$$

$$2 \mapsto 4$$

$$3 \mapsto 1$$

$$4 \mapsto 2$$

$$(\tau \circ \sigma)(3) = \tau(\sigma(3)) = 3$$

$$(\tau \circ \sigma)(1) = \quad = 4$$

$$(\tau \circ \sigma)(2) = \quad = 1$$

Def: Abb. $f: A \rightarrow B$ umkehrbar

$:\Leftrightarrow$ es ex. eine Abb. $g: B \rightarrow A$

daruf, dass

$$g \circ f \stackrel{!}{=} \text{id}_A$$

$$\text{und } f \circ g \stackrel{!}{=} \text{id}_B$$

$\rightarrow$ falls f umkehrbar, dann g

eindeutig bestimmt: $g =: f^{-1}$

$\uparrow$
die Umkehrfkt. von f

f umkehrbar $\Leftrightarrow f$ bijektiv