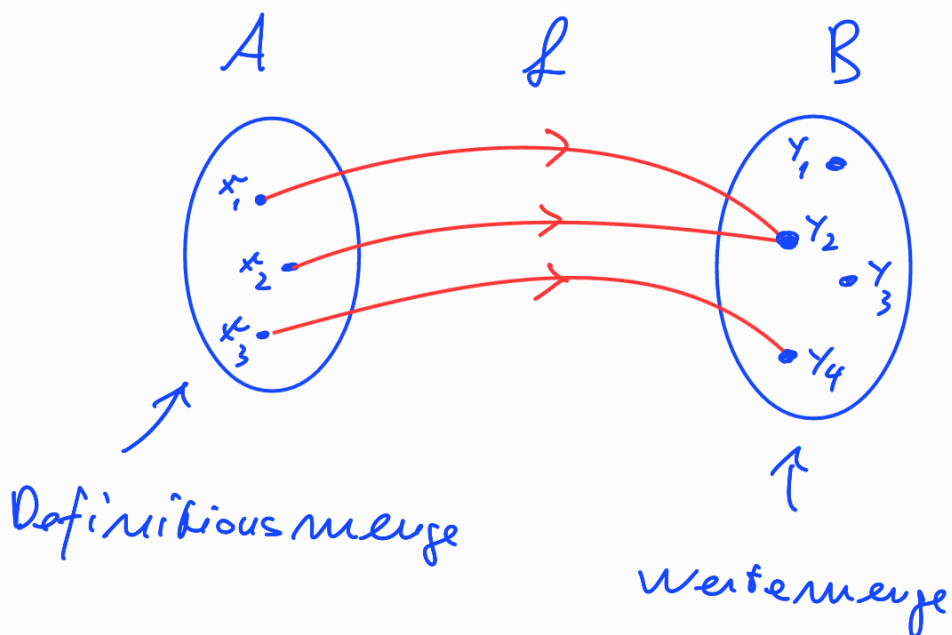


Wiederholung:

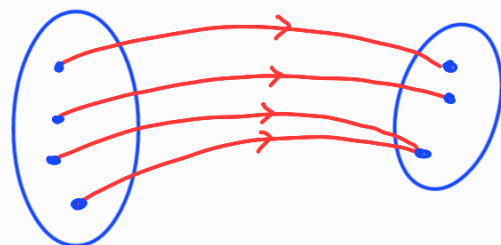
Abbildung:

$$f: A \rightarrow B$$
$$x \mapsto f(x)$$

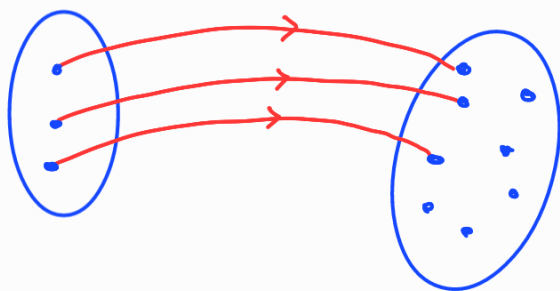


- y_4 Bild von x_3 unter f
- x_3 Urbild von y_4 unter f

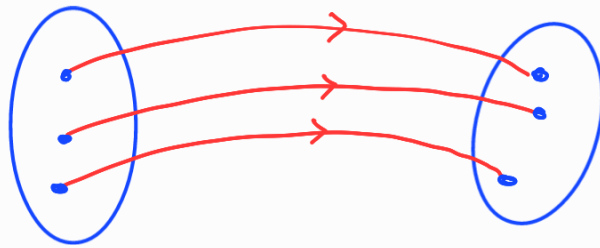
f surjektiv $\Leftrightarrow$ jedes $y \in B$ besitzt mindestens ein Urbild



f injektiv $\Leftrightarrow$ jedes $y \in B$ besitzt höchstens ein Urbild



f bijektiv $\Leftrightarrow$ jedes $y \in B$ besitzt genau
ein Urbild



$\Leftrightarrow f$ zugleich surjektiv und injektiv

$\Leftrightarrow f$ umkehrbar : es existiert
Umkehrabbildung $f^{-1} : B \rightarrow A$

derart, dass

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_A$$

$$f \circ f^{-1} = \text{id}_B$$

komposition: $(f \circ g)(x) := f(g(x))$

also $f^{-1}(f(x)) = x$

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \square$$

im Folgenden: reelle, stetige, differenzierbare

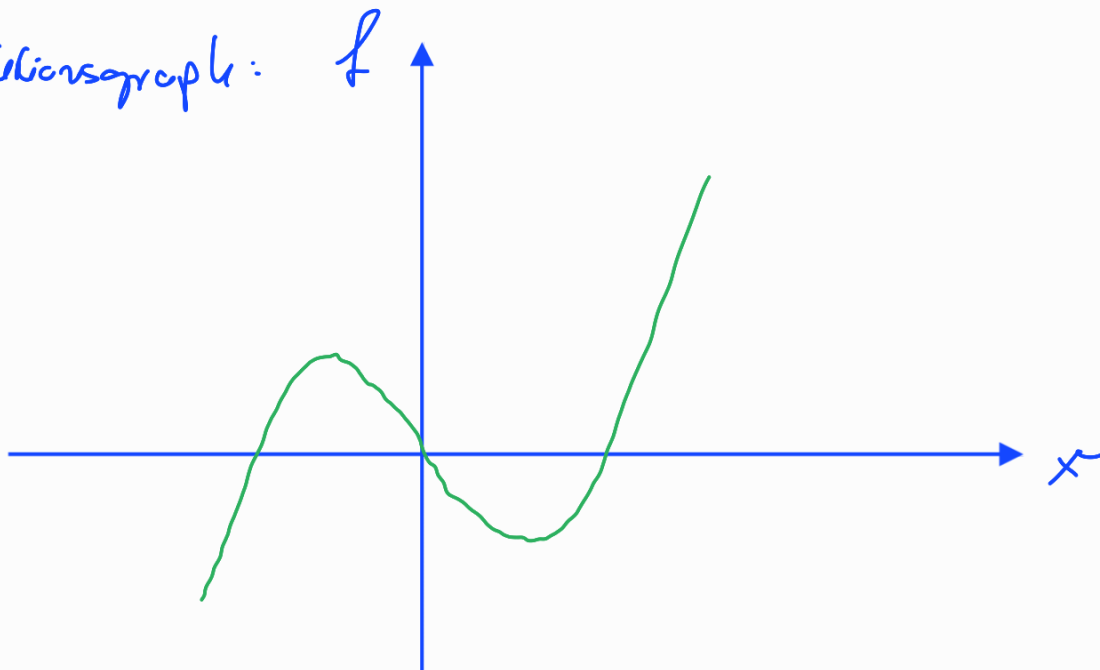
Abbildungen / Funktionen:

z.B.: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) = x^3 - x$

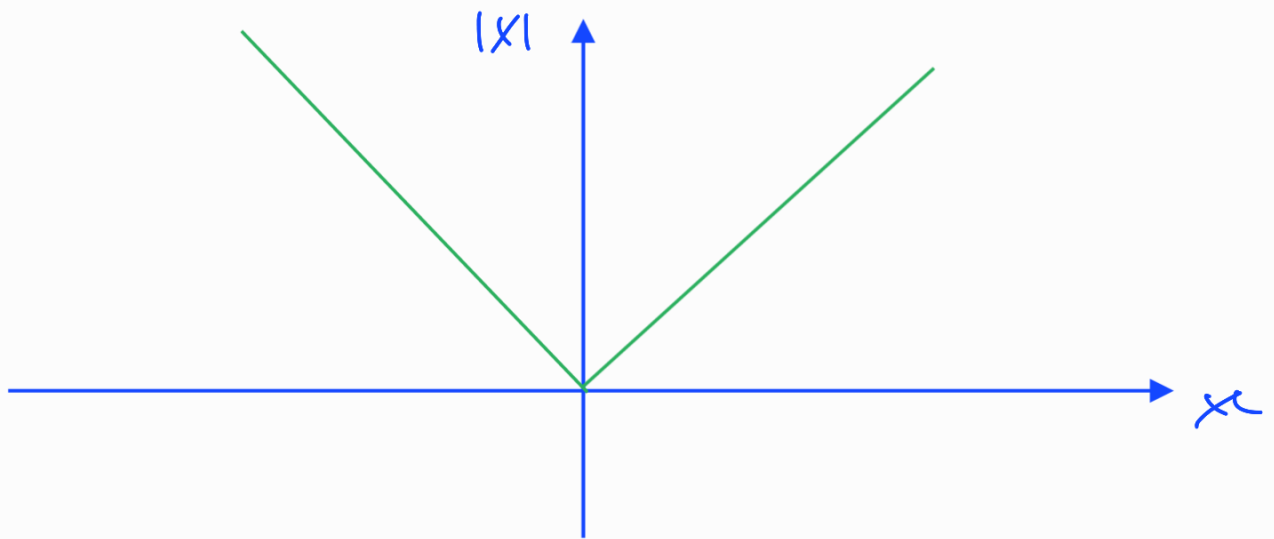
kurz: $f(x) = x^3 - x$

noch kürzer: $x^3 - x$

→ Funktionsgraph:



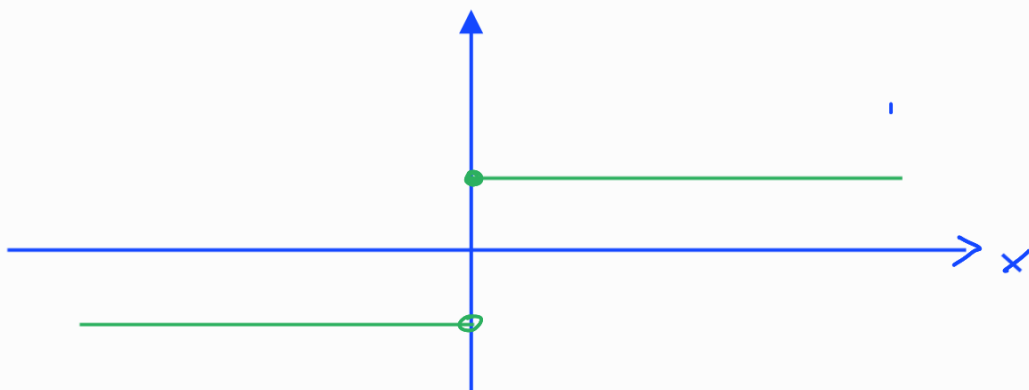
- f stetig $\hat{=}$ „keine Sprünge im Funktionsgraph“
- f differenzierbar $\hat{=}$ „für jedes x ex. eindeutige Tangente am Funktionsgraph“



$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$$

↑
Stetig, nicht differenzierbar
in $x=0$

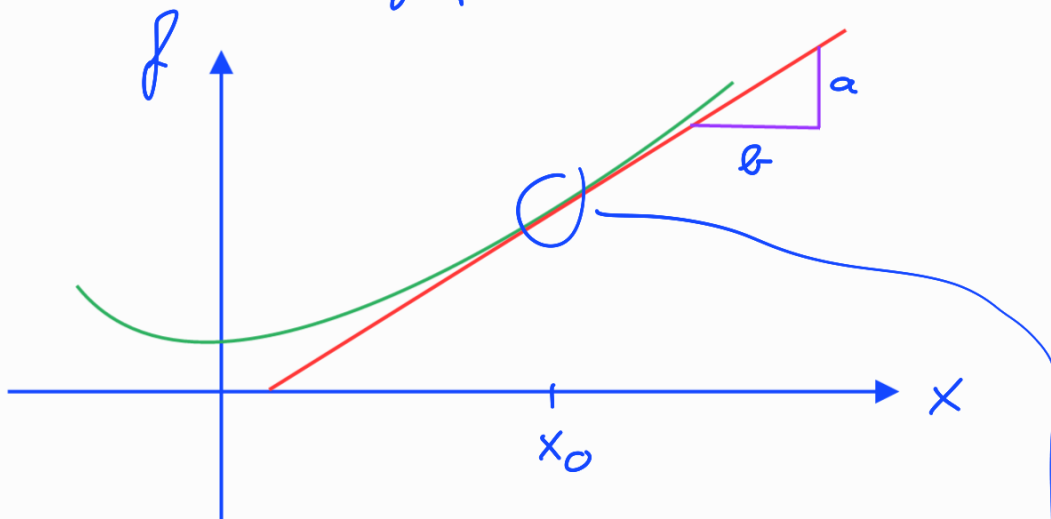
$$f(x) = \begin{cases} -1 & : x < 0 \\ +1 & : x \geq 0 \end{cases}$$



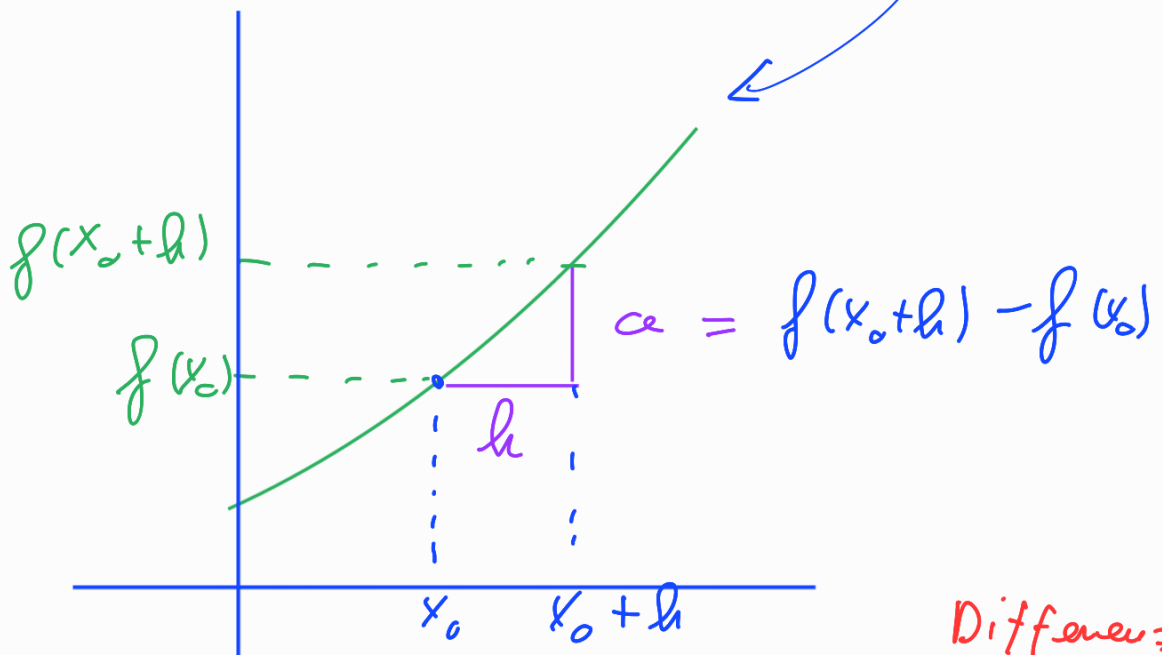
Ableitung

(einen diff. baren Fkt f im x_0 :
 $f'(x_0) \hat{=}$ Steigung der Tangente an

Fkt.-graph bei $x = x_0$



$$\rightarrow f'(x_0) = a/b$$



$$f'(x_0) \stackrel{!}{=} \frac{a}{h} = \frac{1}{h} (f(x_0 + h) - f(x_0))$$

↪ "für h beliebig klein"

Differenzen-
quotient

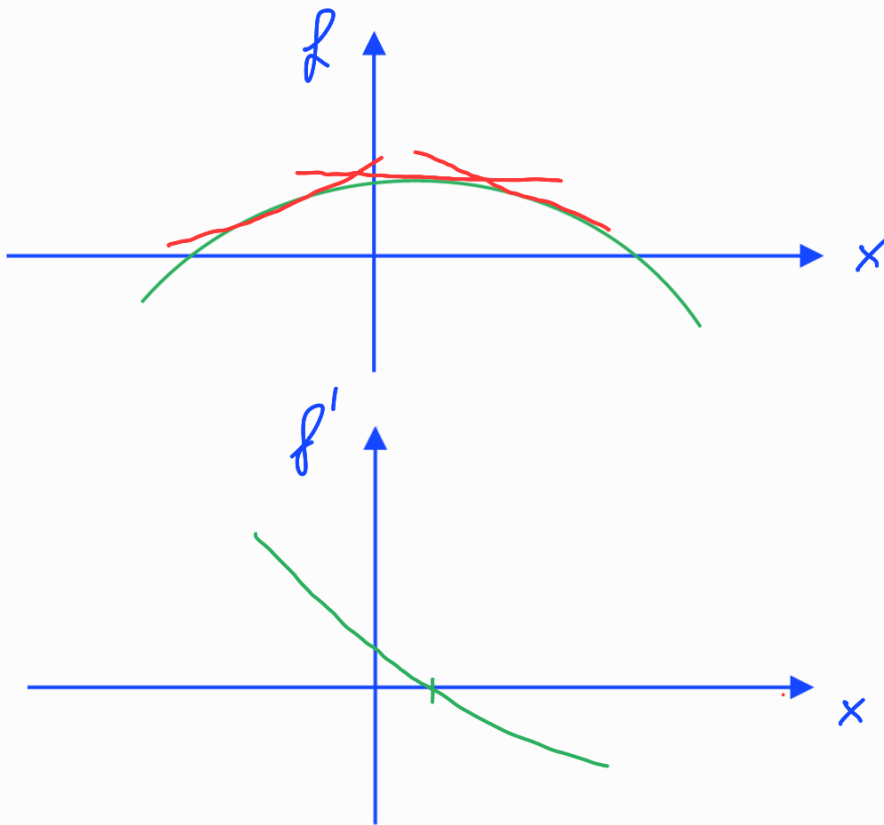
Def: Ableitung der Fkt. $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 :

$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x_0 + h) - f(x_0))$$

Ableitung von $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

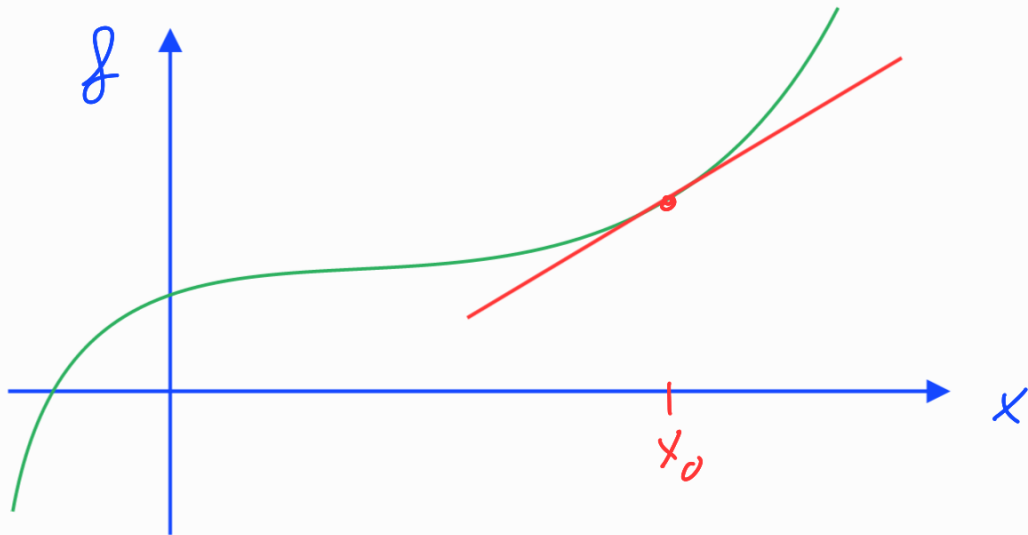
$\equiv$ Funktion $f': D \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f'(x)$

Bsp:



Anwendung: Lineare Näherung

einer Fkt. f um $x = x_0$:



$$f'(x_0) = \frac{1}{h} (f(x_0 + h) - f(x_0)) \quad \text{für } h \rightarrow 0$$

↳

$$f(\underline{x_0 + h}) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \underline{h}$$

↑
in guter Näherung für hinreichend
kleine h

Elementare Berechnung der Ableitung

$$1) \quad f(x) = ux + v \quad \rightarrow \quad f'(x) = u$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{h} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = \frac{1}{h} (u(x_0 + h) + v - (ux_0 + v)) = \frac{1}{h} uh = \underline{\underline{u}}$$

$$2) \quad g(x) = x^2, \quad g'(x) = 2x \quad ??$$

weil:

$$2x^{2-1} = 2x^1 = 2x$$

$$g'(x_0) = \frac{1}{h} (g(x_0+h) - g(x_0))$$

$$= \frac{1}{h} ((x_0+h)^2 - x_0^2)$$

$$= \frac{1}{h} (\cancel{x_0^2} + 2hx_0 + h^2 - \cancel{x_0^2})$$

$$= 2x_0 + \cancel{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 2x_0$$

$$\text{d.h. } (x^2)' = 2x \quad \checkmark$$

$$3) \quad (x^u)' = \underline{\underline{u x^{u-1}}} \quad ! ?$$

$$\Rightarrow (x^u)' = \frac{1}{h} ((x+h)^u - x^u)$$

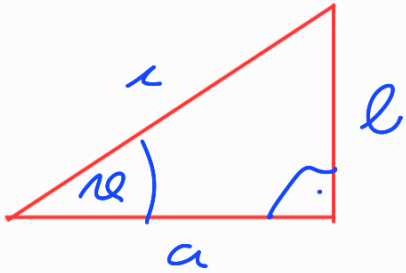
$$= \frac{1}{h} ((x+h)(x+h) \dots (x+h) - \underline{x^u})$$

$$= \frac{1}{h} (\cancel{x^u} + u \cancel{h} x^{u-1} + o(h^2) - \underline{x^u})$$

$$= u x^{u-1} + o(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \underline{\underline{u x^{u-1}}} \quad !$$

$$3) (x^d)' = d x^{d-1} \quad \text{für } d \in \mathbb{R}$$

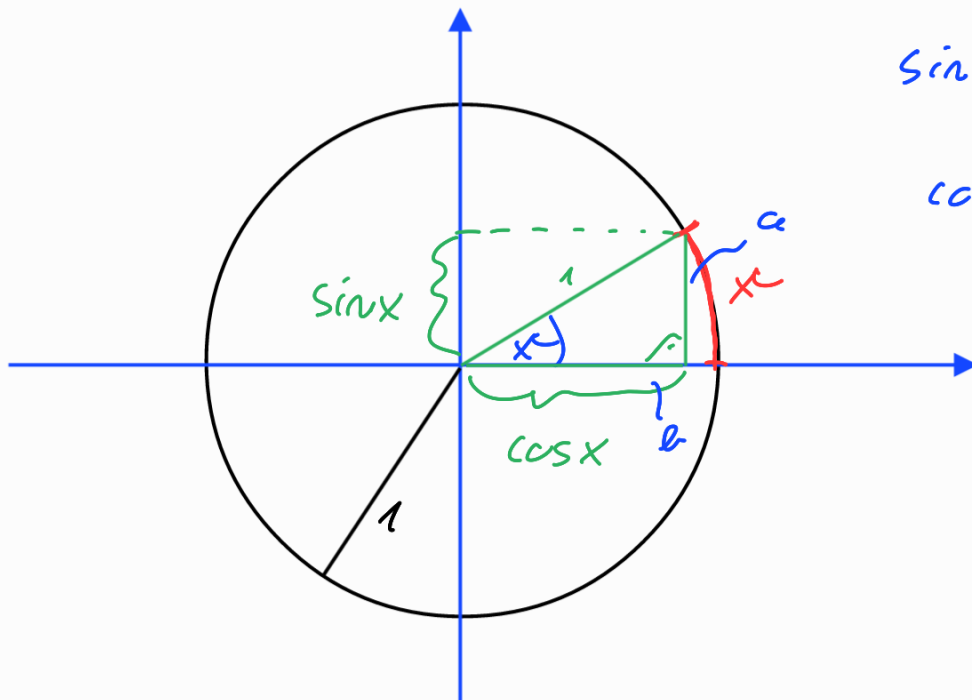
4) Ableitung der trigonometrischen Fkt. $\cos$, $\sin$



$$\sin \alpha = b/c$$

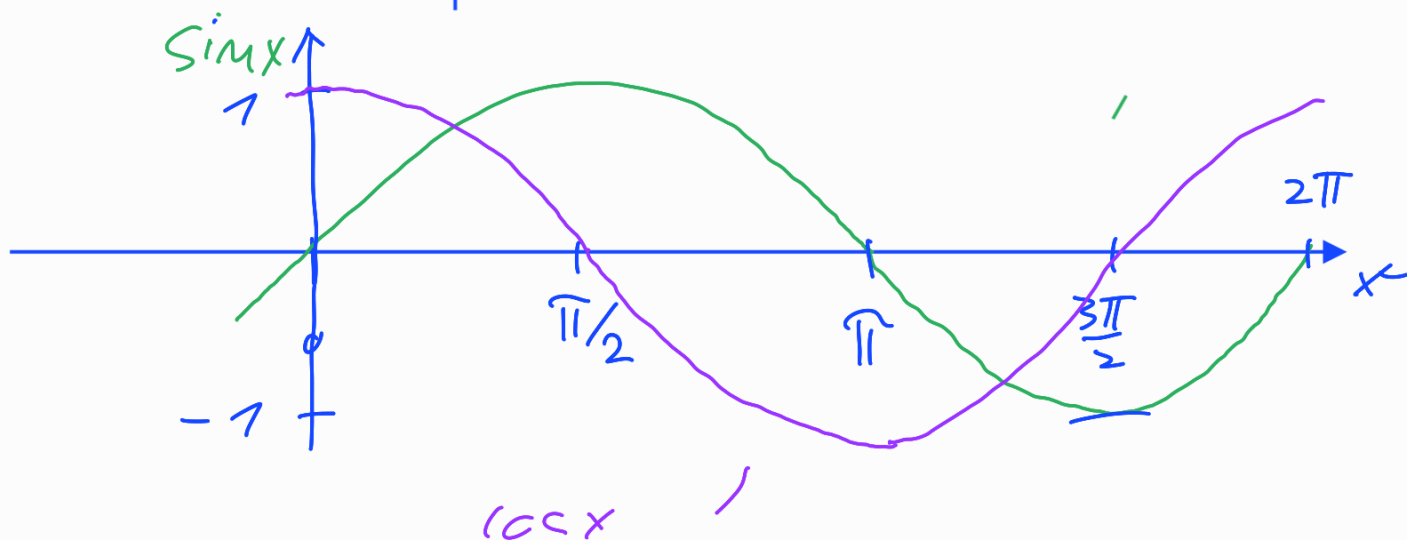
$$\cos \alpha = a/c$$

Winkel im Bogenmaß: $x \mapsto \cos x, \sin x$

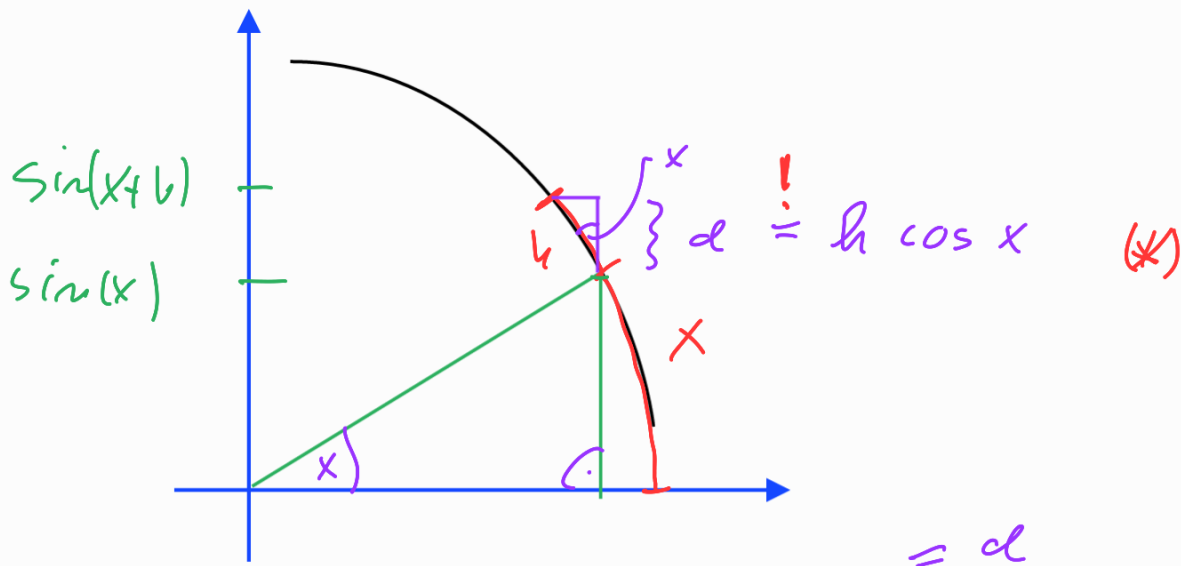


$$\sin x = \frac{a}{1} = a$$

$$\cos x = \frac{b}{1} = b$$



$$(\sin x)'$$



$$\begin{aligned} \hookrightarrow (\sin x)' &= \frac{1}{h} (\sin(x+h) - \sin x) \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{h} (h \cos x) = \cos x \end{aligned}$$

d.h. $(\sin x)' = \cos x$

analog $(\cos x)' = -\sin x$

Bsp: Ableitung von

$$f(x) = (3x \cos(x^2))^2$$

$$\rightarrow f'(x) = ?$$

$\rightarrow$ Kettenregel:

(1) Linearität:

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(\lambda f)' = \lambda f'$$

(2) Produktregel:

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

(3) Quotientenregel

$$(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

(4) Kettenregel

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) g'$$

d.h.:

$$(f(g(x)))' = \underbrace{f'(g(x))}_{\substack{\text{äußere} \\ \text{Ableitung}}} \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{innere} \\ \text{Ableitung}}}$$

(5) Abl. der Umkehrfkt.:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Bsp: $f(x) = (3x \cos(x^2))^2$

$$f'(x) = 2 (3x \cos(x^2)) \cdot (3x \cos(x^2))'$$

4)

$$= 6x \cos(x^2) \cdot \{ 3 \cos(x^2) + 3x (\cos(x^2))' \}$$

2)

$$= 6x \cos(x^2) \{ 3 \cos(x^2) + 3x (-\sin(x^2)) 2x \}$$

4)