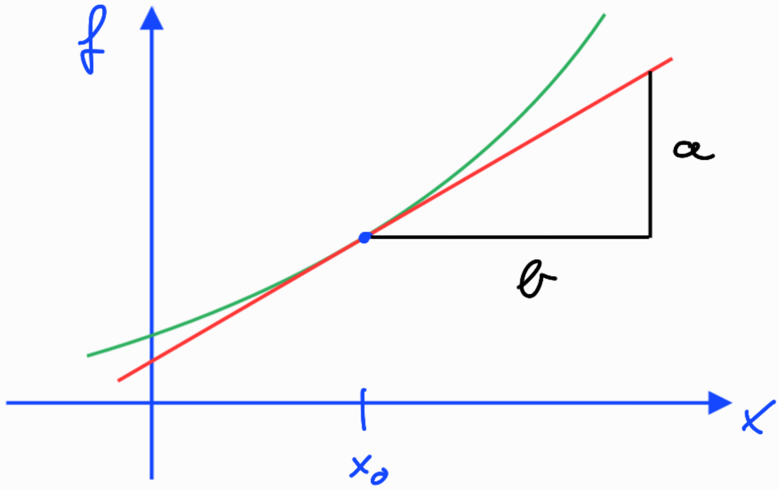
Wiederholung:

Ableitung



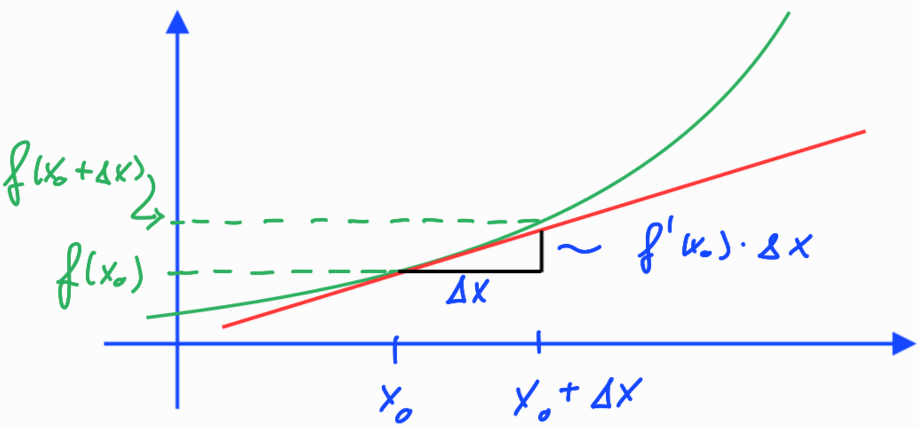
$$\boxed{f'(x_0) = \frac{a}{b} = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{1}{h}\left(f(x_0+h) - f(x_0) \right)}_{\text{Differenzenquot.}}}$$

Notation:

- $f' = \frac{df}{dx}$
- $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$
- $f'(t_0) = \dot{f}(t_0) = \frac{df}{dt}(t_0)$

⇒ Lineare Näherung:

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^2)}$$



$\longrightarrow \quad \bullet \ (x^n)' = n x^{n-1}$

$\bullet \ (\sin x)' = \cos x$

$\bullet \ (\cos x)' = -\sin x \qquad \ldots$

Ableitungsregeln:

1) $(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'$ (Linearität)

2) $(fg)' = f'g + fg'$ (Leibniz)

3) $$(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

4) $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$ (Kettenregel)

d.h. $f(g(x))' = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{äußere}} \ \underbrace{g'(x)}_{\text{innere}}$ Ableitung

5) $$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Warum gelten diese Regeln?

Linearität:

$$\frac{1}{h}\left((f+\lambda g)(x+h) - (f+\lambda g)(x) \right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{h}\left(f(x+h) - f(x) \right)}_{f'(x)} + \underbrace{\lambda \frac{1}{h}\left(g(x+h) - g(x) \right)}_{\lambda g'(x)}$$

✓

Leibnizsche Produktregel:

$$(fg)'(x) = \frac{1}{h}\Big(\underbrace{f(x+h)}_{= f(x) + f'(x)h} \overbrace{g(x+h)}^{= g(x) + g'(x)h} - f(x)g(x) \Big)$$

$$= \frac{1}{\cancel{h}}\left(f'(x)g(x)\cancel{h} + f(x)g'(x)\cancel{h} + f'(x)g'(x)h^2 \right)$$

$$\underset{h\to 0}{=} f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Kettenregel:

$$f(g(x))' = \frac{1}{h}\left(f(\underline{g(x+h)}) - f(g(x))\right)$$

$$\overset{\text{L.N.}}{=} \frac{1}{h}\left(f(\underline{g(x)} + \underline{g'(x)h}) - f(g(x))\right)$$

$$\overset{\text{L.N.}}{=} \frac{1}{\cancel{h}}\left(\cancel{f(g(x))} + f'(g(x)) \cdot g'(x)\cancel{h} - \cancel{f(g(x))}\right)$$

$$= f'(g(x))\, g'(x)$$

Quotientenregel:

$$\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} + f\left(-\frac{1}{g^2}\right)g'$$

$$= (f'g - fg')/g^2 \quad \checkmark$$

Ableitung der Umkehrfkt.:

$$(f^{-1} \circ f)(x) \overset{!}{=} x \qquad \Big| \frac{d}{dx}$$

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \xrightarrow[x = f^{-1}(y)]{} (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Höhere Ableitungen:

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Funktion $f : x \mapsto f(x)$

Abl.

1. Ableitung $f' : x \mapsto f'(x) := \ldots\ldots$

Abl.

2. Ableitung $f'' : x \longmapsto f''(x) := (f')'(x)$

Abl.

3. Ableitung $f''' : x \longmapsto f'''(x) := (f'')'(x)$

$\vdots$

Notation:

$$f^{(1)} := f' \quad , \quad f^{(0)} := f$$

$$f^{(2)} := f''$$

$$f^{(3)} := f'''$$

$\rightarrow$ kurze Def.:

$$f^{(0)} := f$$

$$f^{(n+1)} := \left(f^{(n)}\right)'$$

$\lrcorner$

Beispiel: $f(x) = x^4$

$$f'(x) = 4x^3$$

$$f''(x) = 4 \cdot 3\, x^2$$

$$f'''(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2\, x$$

$$f^{(4)}(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$$

$$f^{(5)}(x) = 0 \,, \quad f^{(n)} = 0 \text{ für } n \geq 5$$

Fakultät

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

"n Fakultät"

allgemeiner:

$$\left(x^m\right)^{(\ell)} = \begin{cases} m \cdot (m-1) \cdots (m-\ell+1)\, x^{m-\ell} & : \ell < m \\ m! & : \ell = m \\ 0 & : \ell > m \end{cases}$$

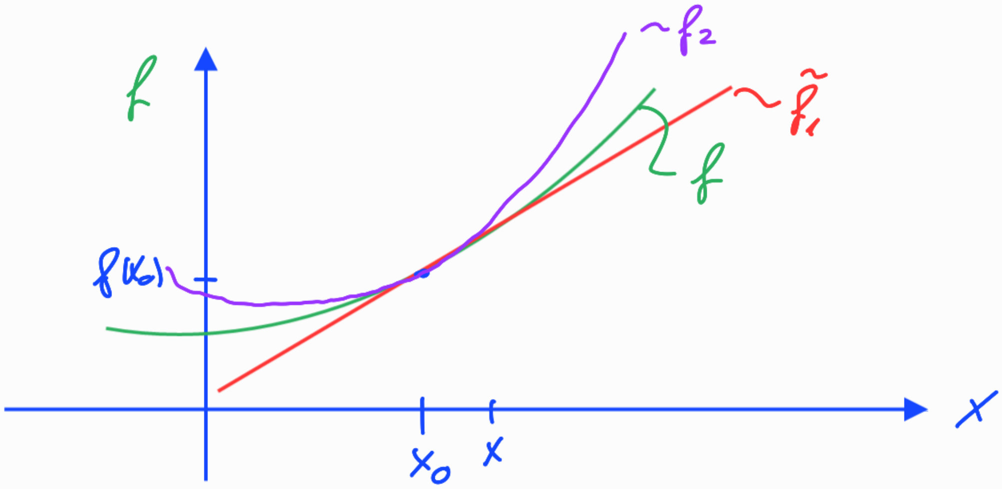
an der Stelle $x_0 = 0$:

(*) $$\left.\left(x^m\right)^{(\ell)}\right|_{x=0} = \begin{cases} 0 & : \ell \neq m \\ m! & : \ell = m \end{cases}$$

Taylor-Entwicklung

n-Ordnung einer Fkt. $f(x)$ um Stelle x_0

Idee: approximiere Fkt f um x_0 durch geeignetes Polynom n-ten Grades $\tilde{f}_n(x)$



$n=1$: $$\tilde{f}_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \checkmark$$

(lin. Näherung)

$n=2$: $$\tilde{f}_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2$$

?

Wahl von a_2 so, dass

$$\tilde{f}_2''(x_0) = f''(x_0) \quad !$$

allg. n:

$$\tilde{f}_n(x) = \underline{\underline{a_0}} + \underline{\underline{a_1}}(x-x_0) + \underline{\underline{a_2}}(x-x_0)^2 + \dots + \underline{\underline{a_n}}(x-x_0)^n$$

mit $n+1$ Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n$,

eindeutig bestimmt durch $n+1$ Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{f}_n(x_0) &= f(x_0) \\ \tilde{f}_n^{(1)}(x_0) &= f^{(1)}(x_0) \\ &\vdots \\ \tilde{f}^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0) \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} n+1 \\ \text{Gleichungen!} \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \tilde{f}_n^{(l)}(x_0) = f^{(l)}(x_0) \quad : l \leq n$$

zur Vereinfachung „ohne Beschränkung der Allgemeinheit" (o. b. d. A.): $\boxed{x_0 = 0}$

[

falls $x_0 \neq 0$, betrachte statt $f(x)$

die Fkt. $h(x) := f(x+x_0)$!]

mit $x_0 = 0$ folgt:

$$\tilde{f}_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$
$$= \sum_{m=0}^{n} a_m x^m$$

↳ höhere Ableitungen von $\tilde{f}_n(x)$ bei $x_0 = 0$

$$\underline{\tilde{f}_n^{(\ell)}(0)} = \sum_{m=0}^{n} a_m (x^m)^{(\ell)}\Big|_{x=0} = \underline{a_\ell \, \ell!}$$

(*) (Beispiel!)

$$\overset{!}{=} \underline{f^{(\ell)}(0)}$$

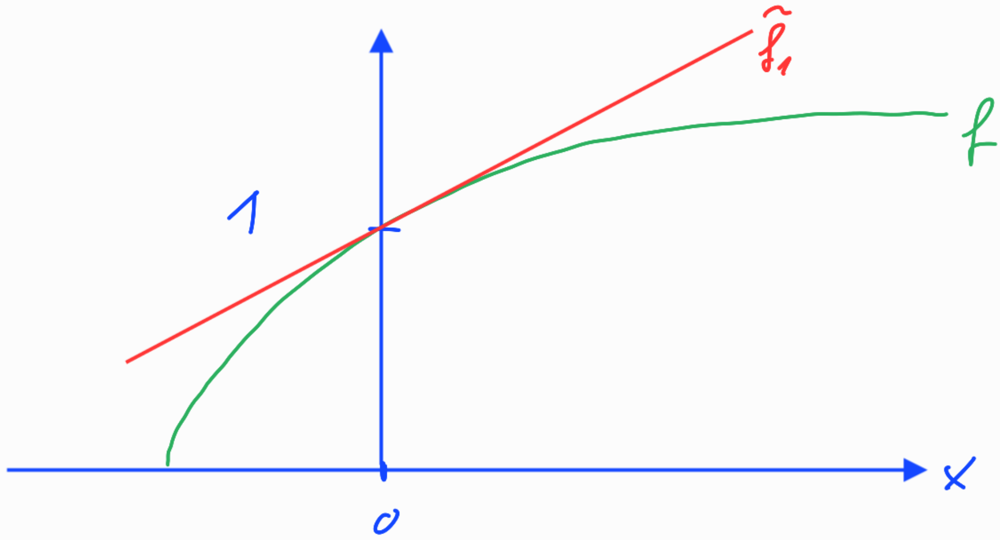
⟶ wähle $a_\ell = \frac{1}{\ell!} f^{(\ell)}(0)$! ✓

⟶ Taylor-Entwicklung n-ten Grades der Funktion $f(x)$ in $x_0 = 0$:

$$\boxed{\tilde{f}_n(x) := \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^m}$$

:

Beispiel: $f(x) = \sqrt{1+x}$



$$f(x) = (1+x)^{1/2} \overset{x=0}{\leadsto} a_0 = f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \qquad a_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1!} = 1/2$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2} \qquad a_2 = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2!} = -\frac{1}{8}$$

$$f'''(x) = +\frac{3}{8}(1+x)^{-5/2} \qquad a_3 = \frac{3}{8}\,\frac{1}{3!} = \frac{1}{16}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}(1+x)^{-7/2} \qquad a_4 = -\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{4!} = -\frac{5}{128}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + O(x^5)$$

"anständige" Fkten können beliebig genau durch eine Taylor-Entwicklung approximiert werden:

d.h.

$$\boxed{f(x) \overset{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$$

mit $a_n = f^{(n)}(0)/n!$

Potenzreihe der (analytischen) Fkt. f

Exponentialfunktion

$$f(x) = a^x \qquad \text{mit } a \in \mathbb{R}_+$$

$$f'(x) = ?$$

mit Differenzenquotient:

$$(a^x)' = f'(x) = \frac{1}{h}\left(a^{x+h} - a^x\right) = \underbrace{\frac{1}{h}(a^h - 1)}_{\text{unabhängig von } x!} \cdot \overbrace{a^x}^{f(x)}$$

d.h. $(a^x)' = c_a \cdot a^x$!

Euler: wähle Basis $a = a_1$ so, dass

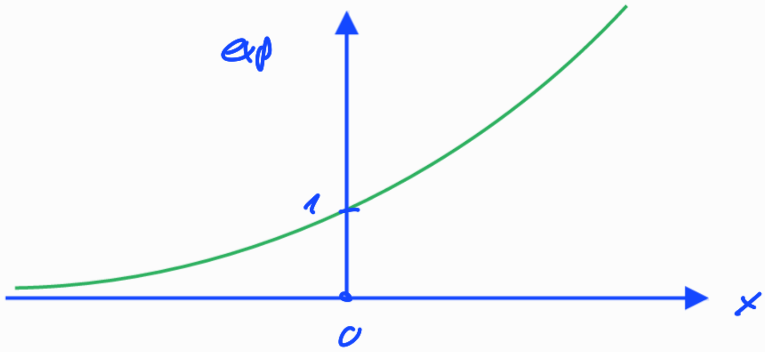
$c_{a_1} = 1$! $\quad (\to f'(x) = f(x) \;!!)$

Euler-Zahl: $e \equiv a_1$!

2) Def.: Exponentialfkt.:

$$e^x = \exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$x \longmapsto \exp(x) := e^x$$



$$(e^x)' = e^x \; ! \qquad \exp' = \exp$$

d.h. $(e^x)^{(\ell)} = e^x \qquad \exp^{(\ell)} = \exp$

Für $x=0$: $(e^x)^{(\ell)}\Big|_{x=0} = e^0 = 1$

Taylor-koeffizienten: $a_n = \frac{1}{n!} \underbrace{\exp^{(\ell)}(0)}_{=1} = \frac{1}{n!}$

$$\rightarrow \boxed{e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n}$$

$$\boxed{e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots$$

$(e = e^1 = \exp(1))$ $\boxed{= 2{,}718 \dots}$