Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

PD. Dr. R. Klesse
Dr. Jochen Peschutter

# Theoretische Physik I – Mechanik – Blatt 12

*Sommersemester 2016*

**Webpage:** *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mechanik2016.html/*

**Abgabe bis Dienstag, den 12.07.2016, 13:00 in den Briefkasten vor dem Eingang des Instituts für Theoretische Physik.**

Es sind Gruppenabgaben von bis zu drei Personen erlaubt. Bitte schreiben Sie leserlich und heften Sie Ihre Abgabe am oberen linken Rand zusammen. Versehen Sie Ihre Abgaben mit Ihren Namen sowie dem Namen Ihres Übungsgruppenleiters. Bitte beachten Sie die Hinweise zum Übungsbetrieb auf der oben genannten Homepage zur Vorlesung.

## 44. Schlafender Kreisel

Aus der Vorlesung ist Ihnen die Dynamik des symmetrischen Kreisels bekannt. Hier interessiert uns insbesondere dessen effektives Potenzial $U_{\text{eff}}(\vartheta)$. Wir nehmen an, dass $\vartheta$ klein sein möge, der Kreisel also nahezu aufrecht rotiert. Entwickeln Sie unter dieser Annahme das effektive Potenzial $U_{\text{eff}}(\vartheta)$ in $\vartheta$ und zeigen Sie, dass es nur dann ein lokales Minimum besitzt, wenn die Kreisfrequenz $\omega$ der Rotation des Körpers oberhalb einer bestimmten Grenzfrequenz $\omega_c$ liegt. Bestimmen Sie diese. Erläutern Sie mithilfe dieser Erkenntnis, was also mit einem Kreisel passiert, der anfänglich ausreichend schnell aufrecht rotiert und mit der Zeit durch Reibung langsamer wird.

## 45. Schneller Kreisel

In dieser Aufgabe wollen wir die Präzessionsfrequenz $\omega_P$ eines *schnellen* Kreisels berechnen, für den die Rotationsachse $\omega$, die Richtung des Drehimpuls $\mathbf{L}$ und die Richtung der dritten Hauptträgheitsachse $\mathbf{h}_3$ näherungsweise zusammenfallen, d.h. $\omega \parallel \mathbf{L} \parallel \mathbf{h}_3$. Damit es zur Präzession kommen kann, muss jedenfalls auf den Drehimpuls ein Drehmoment $\mathbf{M}$ wirken, da nur dann der ansonsten raumfeste Drehimpuls ein zeitliche Änderung erfährt: $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}$. Damit es außerdem zu einer Richtungsänderung des Drehimpuls kommt, muss dieses Drehmoment in einer anderen Richtung wirken als in der des Drehimpuls. Wird dieses Drehmoment bspw. durch die Schwerkraft ausgeübt, weil die Drehachse $\omega$ des Kreisels nicht parallel zur Schwerkraft liegt ($\omega \nparallel \mathbf{e}_3$), kommt es zur periodischen Änderung des Drehimpuls, so dass dieser einen Kegel beschreibt. Gehen Sie also von $\omega = \omega \mathbf{h}_3$, $\mathbf{L} = I_3 \omega \mathbf{h}_3$ und außerdem von einer nahezu konstanten Kreisfrequenz, d.h. $\dot{\omega} \approx 0$, aus. Berechnen Sie dann $\mathbf{M}$ im Schwerefeld auf der einen Seite und $\dot{\mathbf{L}}$ auf der anderen Seite, um die zeitliche Änderung der dritten Hauptträgheitsachse $\mathbf{h}_3$ zu finden und damit auch die Präzessionsfrequenz $\omega_P$.

## 46. Zeitunabhängige Lagrange-Funktion

Wir betrachten ein System mit Koordinaten $q$ im $\mathbb{R}^n$, dessen Lagrange-Funktion *nicht explizit* von der Zeit abhänge, d.h. $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$.

**a)** Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Größe

$$f(q,\dot{q}) := \sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L(q,\dot{q})$$

eine Erhaltungsgröße ist.

**b)** Berechnen Sie die Erhaltungsgröße $f(q,\dot{q})$ nun explizit für eine Punktteilchen der Masse $m$ in einem Kraftfeld $\mathbf{F} = -\text{grad}\, U$. Welche Rolle spielt $f(q,\dot{q})$ in diesem Fall?

## 47. Hamiltonsche Mechanik

Sie haben kürzlich in der Vorlesung das sehr wichtige und nützliche Konzept der Hamiltonschen Mechanik kennengelernt. Hier wollen wir die damit verbundenen Defintionen einüben.

**a)** Sei zunächst als Ausgangspunkt die Lagrange-Funktion $L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x)$ eines eindimensionalen Systems mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Bestimmen Sie den verallgemeinterten Impuls (bzgl. Koordinate $x$), die Hamilton-Funktion und die Hamiltonschen Gleichungen. Welche Bedingung muss $p(\dot{x})$ erfüllen, damit diese Tranformation durchführbar ist?

**b)** Wiederholen Sie die Berechnung der verallgemeinerten Impulse, der Hamilton-Funktion und der Hamiltonschen Gleichungen für ein zweidimensional definiertes System mit rotationssymmetrischem Potenzial in Polarkoordinaten, d.h. für $L(r,\varphi,\dot{r},\dot{\varphi}) := \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$.

**c)** Schließlich betrachten wir ein mechanisches System mit $n$ Freiheitsgraden, d.h. $q \in \mathbb{R}^n$. Die Lagrange-Funktion sei nun folgendermaßen definiert:

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\,\dot{q} - U(q).$$

Hierbei ist $M(q)$ die Massenmatrix, die insbesondere auch von den Koordinaten $q$ abhängen darf. Berechnen Sie nun auch hierfür die verallgemeinerten Impulse, die Hamilton-Funktion und die Hamiltonschen Gleichungen. Welche Bedingung muss $M(q)$ nun erfüllen, damit die (in **a)** gesuchte) notwendige Bedingung für die verallgemeinerten Impulse erfüllbar ist?