Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

PD. Dr. R. Klesse
Dr. Jochen Peschutter

Theoretische Physik I – Mechanik – Blatt 13

Sommersemester 2016

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mechanik2016.html/*

Abgabe bis Dienstag, den 19.07.2016, 13:00 in den Briefkasten vor dem Eingang des Instituts für Theoretische Physik.

Es sind Gruppenabgaben von bis zu drei Personen erlaubt. Bitte schreiben Sie leserlich und heften Sie Ihre Abgabe am oberen linken Rand zusammen. Versehen Sie Ihre Abgaben mit Ihren Namen sowie dem Namen Ihres Übungsgruppenleiters. Bitte beachten Sie die Hinweise zum Übungsbetrieb auf der oben genannten Homepage zur Vorlesung.

48. Satz von Liouville

Wir betrachten ein freies Teilchen der Masse $m = 1g$ in einer Dimension.

a) Wie lautet die Hamilton-Funktion?

b) Stellen Sie in einem q-p-Diagramm das Hamiltonsche Vektorfeld graphisch dar.

c) Das Phasenraumgebiet $G = [-q_0, q_0] \times [-p_0, p_0] \subset \Gamma \equiv \mathbf{R}^2$ mit $q_0 = 1cm$ und $p_0 = 1gcm/s$ (bei $t = 0$) werde durch den Hamiltonschen Fluss Φ_t transportiert. Skizzieren Sie G, $\Phi_{3s}(G)$, $\Phi_{5s}(G)$ und zeigen Sie explizit, dass diese drei Gebiete dasselbe Volumen besitzen.

d) Zur Zeit $t_k = 5s$ werde ein Kraftstoß der Stärke $P = 2gcm/s$ auf das Teilchen ausgeübt, d.h. das Teilchen erfährt die Kraft $F(t) = P\delta(t - t_s)$. Wie verändert sich das Phasenraumgebiet aufgrund dieses Kraftstoßes? Ändert sich dabei sein Phasenraumvolumen?

49. Wiederkehr

Wir betrachten ein System von N unabhängigen harmonischen Oszillatoren, beschrieben durch die Hamilton-Funktion

$$H(q, p) = \sum_{k=1}^{N} \frac{p_k^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q_k^2.$$

Die Frequenzen seien gegeben durch

$$\omega_k = \omega_0 \frac{1}{k}$$

mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{1s}$. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich das System im Anfangszustand $x_o = (x_1^o, x_2^o, \ldots, x_N^o)$, wobei $x_k^o = (q_k^o, p_k^o)$.

a) Nach welcher Zeit ist der k-te Oszillator in seinen Anfangszustand x_k^o erstmalig zurückgekehrt?

b) Nach welcher Zeit sind der erste, zweite, dritte und vierte Oszillator *zugleich* erstmalig in ihre jeweiligen Anfangszustände zurückgekehrt?

c) Zeigen Sie schließlich, dass das Gesamtsystem der N Oszillatoren nach der Zeit $\tau(N) = \frac{2\pi}{\omega_0}\mathrm{kgV}\{1, \ldots, N\}$ erstmalig in den Anfangszustand x_0 zurückgekehrt ist.
Hierbei ist $\mathrm{kgV}\{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$ das kleinste gemeinsame Vielfache der natürlichen Zahlen $n_1, n_2, n_3, \ldots$.

d) Begründen Sie die Abschätzung

$$\mathrm{kgV}\{1,\ldots,N\} \;\geq\; \prod_{p\;\text{prim},\;p\leq N} p\,.$$

Spätestens seit Gauß wissen wir zudem, dass für eine hinreichend glatte Funktion $f(p)$ (wie etwa $\ln p$) und hinreichend große N

$$\sum_{p\;\text{prim},\;p\leq N} f(p) \;\approx\; \int_2^N f(x)\frac{1}{\ln x}dx\,.$$

Zeigen Sie damit, dass

$$\tau(N) \;\gtrsim\; e^N\,\frac{2\pi}{\omega_0}\,.$$

Wie groß muss demnach N gewählt werden, damit eine Wiederkehr in den Anfangszustand innerhalb der nächsten 10 Millarden Jahre ausgeschlossen ist?

50. Eigenschaften der Poisson-Klammer

In dieser Aufgabe wollen wir uns von einigen wesentlichen Eigenschaften der Poisson-Klammer überzeugen. Sie spielt eine zentrale Rolle in der Hamiltonschen Mechanik und findet sich in etwas allgemeinerer Form auch in der Quantenmechanik wieder. f, g und h seien im Folgenden auf dem Phasenraum eines Systems definierte Funktionen. Ferner seien diese analytisch, d.h. lokal in einer konvergenten Potenzreihe darstellbar.

a) Zeigen Sie explizit, dass die Poisson-Klammer antisymmetrisch ($\{f,g\} = -\{g,f\}$) und distributiv ($\{f+g,h\} = \{f,h\} + \{g,h\}$) ist.

b) Zeigen Sie nun, dass außerdem die Produktregel gilt: $\{fg,h\} = \{f,h\}g + f\{g,h\}$. Darüberhinaus gilt die Jacobi-Identität ($\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$), die Sie nicht beweisen müssen.

c) Zeigen Sie dann mittels Induktion, dass auch $\{g,h^n\} = nh^{n-1}\{g,h\}$ gilt und dass daraus $\{g,f(h)\} = f'(h)\{g,h\}$ folgt.

51. Poisson-Klammer – Beispiele

Nun berechnen wir einige grundlegende Beispiele.

a) Zeigen Sie, dass für kanonische Koordinaten $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^n$ und die dazu konjugierten Impulse $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$ gilt: $\{q_i,q_j\} = 0$, $\{p_i,p_j\} = 0$ und $\{q_i,p_j\} = \delta_{ij}$. Berechnen Sie auch $\{L_i,p_j\}$ und $\{q_i,L_j\}$ mithilfe der Ihnen bekannten Definition des Drehimpulses $\mathbf{L}$ über den epsilon-Tensor ε_{ijk}.

b) Zeigen Sie, dass die Hamiltonfunktion $H(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ die Zeitentwicklung eines mechanischen Systems generiert, dass also für Lösungen $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ und $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ der Hamiltongleichungen gilt: $\dot{\mathbf{q}} = \{H,\mathbf{q}\}$, $\dot{\mathbf{p}} = \{H,\mathbf{p}\}$ und ganz allgemein $\dot{f}(\mathbf{q},\mathbf{p},t) = \{H,f\} + \frac{\partial}{\partial t}f$.

c) Zeigen Sie auch, dass für die Komponenten des Drehimpulses $\mathbf{L}$ gilt: $\{L_1,L_2\} = L_3$ bzw. ganz allgemein $\{L_i,L_j\} = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk}L_k$.

d) Zeigen Sie mithilfe des vorherigen Aufgabenteils, dass, falls zwei Komponenten des Drehimpulses erhalten sind, auch die dritte Komponente und somit der Drehimpuls insgesamt erhalten ist.