Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

PD. Dr. R. Klesse
Dr. Jochen Peschutter

# Theoretische Physik I – Mechanik – Blatt 4

*Sommersemester 2016*

**Webpage:** *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/mechanik2016.html/*

**Abgabe bis Dienstag, den 10.05.2016, 13:00 in den Briefkasten vor dem Eingang des Instituts für Theoretische Physik.**

Es sind Gruppenabgaben von bis zu drei Personen erlaubt. Bitte schreiben Sie leserlich und heften Sie Ihre Abgabe am oberen linken Rand zusammen. Versehen Sie Ihre Abgaben mit Ihren Namen sowie dem Namen Ihres Übungsgruppenleiters. Bitte beachten Sie die Hinweise zum Übungsbetrieb auf der oben genannten Homepage zur Vorlesung.

## 12. Konservative Vektorfelder *1 Punkt*

**a)** Was ist ein konservatives Vektorfeld und welche Eigenschaften besitzt es?

**b)** Berechnen Sie für folgende Potenziale jeweils das Vektorfeld:

$$U(\mathbf{r}) = \alpha(x^2 + z^2), \quad U(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{|r|}, \quad U(\mathbf{r}) = \alpha \,\ln|r|, \quad U(\mathbf{r}) = \alpha\, |r|\,.$$

**c)** Geben Sie für folgende Vektorfelder ein Potenzial an, falls es sich Ihrer Meinung nach um ein konservatives Vektorfeld handelt. Andernfalls zeigen Sie mittels Wegintegration über einen geeignet gewählten Weg, dass das Vektorfeld nicht konservativ ist.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi(x^2+y^2)} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{|\mathbf{r}|^2}\,\hat{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\,\mathbf{r}.$$

$\alpha \in \mathbf{R}$ und $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^3$ seien konstant und $\hat{\mathbf{r}}$ bezeichne den Einheitsvektor in $\mathbf{r}$-Richtung.

## 13. Phasenraumportrait II *1 Punkt*

In dieser Aufgabe wollen wir uns noch einmal mit einem Phasenraumportrait beschäftigen.

**a)** Gegeben sei das Potenzial $U(x) = -\frac{k}{2}x^2$. Zeichnen Sie den Graphen des Potenzials.

**b)** Nun betrachten wir ein Punktteilchen der Masse $m$, das zur Zeit $t = 0$ bei $x(0) = x_0 = -l$ die Gesamtenergie $E = -\frac{kl^2}{2} + \epsilon \geq 0$ hat und sich in positiver $x$-Richtung bewege. Hierbei ist $\epsilon > 0$ natürlich der Anteil der kinetischen Energie des Teilchens bei $t = 0$. Berechnen Sie den Zeitpunkt $t_1$, zu dem das Teilchen den Ursprung erreicht – also den Zeitpunkt, für den $x(t_1) = 0$ gilt – in Abhängigkeit von $\epsilon$.

**c)** Sie haben soeben $t_1$ als Funktion von $\epsilon$ berechnet, also $t_1(\epsilon)$. Berechnen Sie den Grenzwert von $t_1(\epsilon)$ für $E \to 0$, also für $\epsilon \to \frac{kl^2}{2}$. Die Bahnkurve $x(t)$ für $E = 0$ ist als Separatrix bekannt. Motivieren Sie diese Bezeichnung aus den Ergebnissen dieser Aufgabe.

## 14. Kreise, Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln *1 Punkt*

**a)** Zeichnen Sie in ein kartesisches Koordinatensystem $(x, y)$ einen Punkt $P$ und markieren Sie darin auch seine Polarkoordinaten $(r, \phi)$. Zeichnen Sie außerdem eine vertikale Gerade bei $x = -l$.

**b)** Nun betrachten wir die Mengen aller Punkte $P$, für die der Abstand vom Ursprung und der Abstand von der Geraden durch $x = -l$ proportional zueinander sind. Hierbei seien die Abstände immer positiv zu definieren, so dass die Proportionalitätskonstante $\epsilon$ größer oder mindestens gleich Null ist. Zeigen Sie, dass für jede Menge solcher Punkte

$$r(\phi) = \frac{p}{1 - \epsilon \cos \phi}$$

gilt, wobei $p$ für jede Menge den Abstand des Punktes bei $\phi = \frac{\pi}{2}$ angibt, $p := r(\phi = \frac{\pi}{2})$.

**c)** Zeichnen Sie nun noch einmal das Diagramm aus Aufgabenteil **a)** und fügen Sie jeweils die Graphen der Punktemengen für $\epsilon = 2,\ 1,\ 0,5$ und $0$ hinzu. Benennen Sie diese Graphen entsprechend der Überschrift dieser Aufgabe.

## 15. Keplerproblem *1 Punkt*

Wir betrachten wieder das Zentralpotential $U(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{r}$ mit $\alpha > 0$. Aus der Vorlesung ist Ihnen die Formel

$$\phi - \phi_0 = \frac{l}{2m} \int_{r_0}^{r(\phi)} \frac{\mathrm{d}r}{r^2(E - U_{\text{eff}}(r))}$$

bekannt, wobei $E$ die Gesamtenergie und $U_{\text{eff}}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$ das effektive Potenzial bezeichnen.

**a)** Zeichnen Sie den Graphen von $U_{\text{eff}}(r)$ und diskutieren Sie qualitativ die Bahnkurven für die vier Fälle für die Gesamtenergie $E$, d.h. $E = \min_r U_{\text{eff}}(r)$, $\min_r U_{\text{eff}}(r) < E < 0$, $E = 0$ und $E > 0$.

**b)** Zeigen Sie, dass sich aus der angegebenen Integralgleichung die Funktion $r(\phi)$ aus Aufgabe **14.** ergibt (Tipp: Setzen Sie $r(\phi)$ aus Aufgabe **14.** in die entsprechende Differenzialgleichung aus der Vorlesung ein!).

**c)** Stellen Sie den Zusammenhang zwischen $\epsilon$ und $p$ auf der einen und der Gesamtenergie $E$ und dem Drehimpuls $l$ auf der anderen Seite her.