
Theoretische Physik I – Mechanik – Blatt 7

Sommersemester 2016

Webpage: <http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mechanik2016.html/>

Abgabe bis Dienstag, den 07.06.2016, 13:00 in den Briefkasten vor dem Eingang des Instituts für Theoretische Physik.

Es sind Gruppenabgaben von bis zu drei Personen erlaubt. Bitte schreiben Sie leserlich und heften Sie Ihre Abgabe am oberen linken Rand zusammen. Versehen Sie Ihre Abgaben mit Ihren Namen sowie dem Namen Ihres Übungsgruppenleiters. Bitte beachten Sie die Hinweise zum Übungsbetrieb auf der oben genannten Homepage zur Vorlesung.

24. Schwerelosigkeit im Flugzeug

Ein Flugzeug fliegt bei einem sogenannten *Parabelflug* exakt entlang einer Bahn $\mathbf{r}(t)$, die ein geworfener Körper bei abwesender Luftreibung nur aufgrund der Erdanziehungskraft zurücklegen würde. Zeigen Sie, dass im Flugzeug während des Parabelflugs "Schwerelosigkeit" herrscht.

25. Geoid

Die Erde dreht sich bekanntlich in 24 Stunden einmal um ihre Achse. Aufgrund dieser Rotation bildet die Erdoberfläche nicht eine exakte Kugeloberfläche, sondern befindet sich in der leicht deformierten Gestalt eines *Geoids*. Hier wollen wir diese Form der Erdoberfläche bestimmen.

- a) Zeigen Sie, dass aufgrund der Erdrotation eine Testmasse m bzgl. eines erdfesten Koordinatensystems $o', (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ (mit o' im Erdmittelpunkt und $\mathbf{e}'_3$ parallel zur Erdachse) eine Trägheitskraft mit Potenzial

$$U(x, y, z) = -\frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$$

erfährt ($\omega = 2\pi/24h$).

- b) Zeigen Sie, dass das effektive Gravitationspotenzial im erdfesten System,

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{Gm_E}{r} + \frac{U(\vec{r})}{m},$$

(G Gravitationskonstante, m_E Erdmasse) in Kugelkoordinaten die Form

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = -\frac{Gm_E}{r} \left(1 + \frac{\omega^2 r^3}{2Gm_E} \sin^2 \vartheta \right)$$

annimmt.

- c) Die Erdoberfläche verläuft bekanntlich parallel zu einer Äquipotenzialfläche des effektiven Gravitationspotenzials ϕ . Zeigen Sie damit und anhand von b), dass in guter Näherung die Erdoberfläche durch

$$r(\vartheta) = R_E(1 + \alpha \sin^2 \vartheta)$$

bestimmt ist. Hierbei ist R_E der Abstand des Norpols zum Erdmittelpunkt und $\alpha = \omega^2 R_E^3 / 2Gm_E$ ein dimensionsloser Parameter. Nutzen Sie, dass $\alpha \ll 1$. Um welche Strecke ist damit der Norpol näher am Erdmittelpunkt als ein äquatorialer Punkt?

26. Fermatsches Prinzip

- a) Zeigen Sie mittels Variationsrechnung, dass gemäß des Fermatschen Prinzips ein Lichtstrahl in einem homogenen Medium längs einer Geraden verläuft. Einfachheitshalber dürfen Sie von einem ebenen Lichtstrahl ausgehen.
- b) Begründen Sie ebenfalls mittels des Fermatschen Prinzips das Snelliussche Brechungsgesetz.

27. Minimalfläche

Wir betrachten die Minimalfläche, die sich aus Seifenlauge bildet, wenn sich diese bei geeigneten Randwerten zwischen zwei coaxialen Kreislinien aus Draht aufspannt. Die gemeinsame Achse der Kreislinien sei die x -Achse. Weiterhin befinden sich diese bei $x = -l$ und $x = +l$ und haben beide Radius R . Aus Symmetriegründen muss dann die Minimalfläche durch Rotation einer stetig-differenzierbaren Funktion $y(x)$ mit $y(-l) = R = y(l)$ um die x -Achse entstehen.

- a) Um $y(x)$ zu bestimmen, ist zunächst ein Funktional aufzustellen, dass den Flächeninhalt der beschriebenen Rotationsfläche zu einer gegebenen stetig-differenzierbaren Funktion $y(x)$ ergibt. Skizzieren Sie das Problem und stellen Sie das gesuchte Funktional auf.
- b) Leiten Sie dann die dazugehörige Euler-Lagrange-Gleichung her, als notwendige Bedingung an eine Funktion $y(x)$, die unter den gegebenen Randbedingungen den Flächeninhalt der Rotationsfläche minimiert.
- c) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = k \cosh\left(\frac{x-x_0}{k}\right)$ die gefundene Euler-Lagrange-Gleichung löst und bestimmen Sie die Konstanten k und x_0 für die gegebenen Randbedingungen (l und R).