Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

PD. Dr. R. Klesse
Dr. Jochen Peschutter

Theoretische Physik I – Mechanik – Blatt 8

Sommersemester 2016

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mechanik2016.html/*

Abgabe bis Dienstag, den 14.06.2016, 13:00 in den Briefkasten vor dem Eingang des Instituts für Theoretische Physik.

Es sind Gruppenabgaben von bis zu drei Personen erlaubt. Bitte schreiben Sie leserlich und heften Sie Ihre Abgabe am oberen linken Rand zusammen. Versehen Sie Ihre Abgaben mit Ihren Namen sowie dem Namen Ihres Übungsgruppenleiters. Bitte beachten Sie die Hinweise zum Übungsbetrieb auf der oben genannten Homepage zur Vorlesung.

28. Verallgemeinerte Euler-Lagrange-Gleichungen

Üblicherweise hängen die Lagrange-Funktionen L, die für unsere Betrachtungen relevant sind, nur von Koordinaten q, Geschwindigkeiten $\dot{q}$ und evtl. der Zeit t ab, d.h. $L \equiv L(q, \dot{q}, t)$. Die Euler-Lagrange-Gleichungen (ELG) stellen eine *notwendige* Bedingung an extremalisierende Bahnkurven $q(t)$ der Wirkung $S[q(t)] = \int L(q(t), \dot{q}(t), t)\mathrm{d}t$ dar. Wir wollen in dieser Aufgabe nun einmal annehmen, dass eine Lagrange-Funktion gegeben sei, die zudem von den Beschleunigungen $\ddot{q}$ abhängt, d.h. $L \equiv L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)$. Finden Sie die zu den ELG analoge notwendige Bedingung an eine Bahnkurve $q^\circ(t)$, die die Wirkung

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), t)\mathrm{d}t$$

extremalisiert, unter der Bedingung von fest vorgegebenen Koordinaten $q(t_1)$, $q(t_2)$ *und* Geschwindigkeiten $\dot{q}(t_1)$, $\dot{q}(t_2)$ bei t_1 und t_2. Verfahren Sie hierfür analog zur Herleitung der ELG in der Vorlesung.

29. Mathematisches Pendel

a) Wie lautet die Lagrangefunktion eines Mathematischen Pendels in Polarkoordinaten? Die träge Masse des Pendels sei m_t, seine schwere Masse m_s und die Pendellänge sei l.

b) Leiten Sie daraus die Euler-Lagrange-Gleichungen (ELG) als notwendige Bedingung an eine physikalische Bahnkurve her.

c) Nehmen Sie nun an, dass die maximale Auslenkung ϕ_0 des Pendels aus der Ruhelage ($\phi = 0$) nur sehr klein ist, so dass Sie insbesondere die Näherung $\sin(\phi(t)) \approx \phi(t)$ nutzen können. Finden Sie unter Berücksichtigung dieser Näherung die Lösung der ELG. Wie können Sie mittels des Pendels die Äquivalenz von träger und schwerer Masse testen?

30. Schiefe Ebene

Ein Massenpunkt der Masse m bewege sich unter dem Einfluss der Schwerkraft reibungsfrei auf einer schiefen Ebene. Der Neigungswinkel betrage α. Stellen die Lagrangefunktion dieses Systems in geeigneten Koordinaten dar und bestimmen Sie die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen.

31. Zwei Massen am Faden

Wir betrachten ein *zweidimensionales* System aus zwei Massen, M und m, die durch einen (hinreichend langen) masselosen Faden verbunden sind. Es herrsche ein homogenes Gravitationsfeld mit Beschleunigung $\mathbf{g}$. Der Faden laufe über zwei feste Punkte auf gleicher Höhe im Abstand d. Die erste Masse kann sich nur auf und ab bewegen, während die Masse m außerdem um den festen Punkt auf ihrer Seite rotieren kann.

a) Skizzieren Sie die Anordnung.

b) Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Systems auf.

c) Leiten Sie daraus die Euler-Lagrange-Gleichungen (ELG) als notwendige Bedingung an eine physikalische Bahnkurve her.

d) Lösen Sie die ELG für die Anfangsbedingung $\phi(t = 0) = 0$ und $\dot{\phi}(t = 0) = 0$.