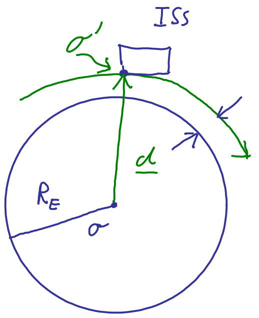
Anwendungsbeispiele:

a) "Schwerelosigkeit" im Weltraum

b) Lagrangepunkte $\longrightarrow$ vgl. Übung

c) Gezeiten: Höhe der Flut

a) "Schwerelosigkeit" in der ISS



$h \simeq 400$ km $<< 6\,000$ km $\simeq R_E$

O: Erdmittelpkt, annähernd inertial

Testmasse m in O' erfährt bzgl. O'

1) Beschleunigungskraft $\vec{F}_b = -m\,\ddot{\vec{d}}$
2) Schwerkraft $\vec{F}_g = -G\,\frac{m\,m_E}{d^2}\,\hat{d}$

$\rightarrow$ Gesamtkraft (bzgl. O') auf Testmasse:

$$\vec{F} = -m\left(\ddot{\vec{d}} + \frac{G\,m_E}{d^2}\,\hat{d}\right) = \vec{0} \quad : \text{"Schwerelosigkeit"}$$

ISS folgt Bahn aufgrund Schwerkraft der Erde („frei fallend"):

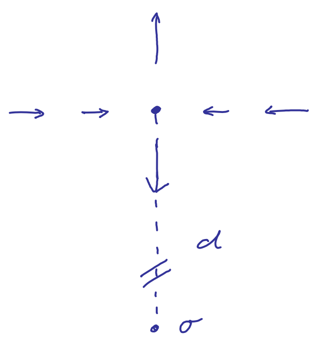
d.h. $\cancel{m_{ISS}}\,\ddot{\vec{d}} = -G\,\cancel{m_{ISS}}\,m_E\,\frac{\hat{d}}{d^2}$

Kraft auf Testmasse m in O' $+ \vec{r}$, $|\vec{r}| << |\vec{d}|$:

$$\vec{F} = G\,m\,m_E\left(\frac{\vec{d}}{d^3} - \frac{\vec{d}+\vec{r}}{|\vec{d}+\vec{r}|^3}\right)$$

mit $\frac{1}{|\vec{d}+\vec{r}|^3} = \frac{1}{d^3} - \frac{3}{d^4}\langle \hat{d}, \vec{r}\rangle + \frac{1}{d^3}\,\mathcal{O}\left(\frac{r}{d}\right)^2$ erhalten wir

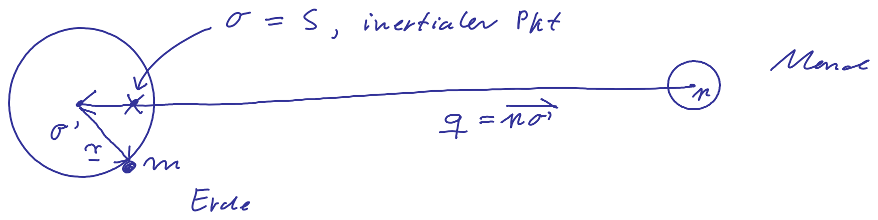
$$\vec{F} = \frac{G\,m\,m_E}{d^2}\left(-\frac{\vec{r}}{d} + 3\,\hat{d}\,\langle \hat{d}, \frac{\vec{r}}{d}\rangle\right):$$



„Gezeitenkraft"

Die Höhe der Flut

Gezeiten verursacht durch gravitative WW mi Mond (und Sonne):



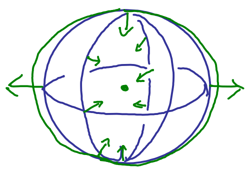
$\underline{d} = \overrightarrow{\sigma\sigma'}$ genügt $\quad m_E \ddot{\underline{d}} = F^q_{EM} = -G m_E m_M \frac{\hat{q}}{q^2}$

Testmasse m in $\sigma' + \underline{r}$ erfährt bzgl σ' (insbesondere)
Beschleunigungs- und Mondanziehungskraft

$$\vec{F} = \vec{F}_b + \vec{F}_M = -m\ddot{\vec{d}} - G m m_M \frac{\vec{q}+\vec{r}}{|\vec{r}+\vec{q}|^3}$$

$$= G m m_M \left(\frac{\vec{q}}{q^3} - \frac{\vec{r}+\vec{q}}{|\vec{r}+\vec{q}|^3} + \cancel{\frac{1}{q^2}\, O\left(\frac{r}{q}\right)^2} \right)$$

$$= \frac{G m m_M}{q^2} \left(-\frac{\vec{r}}{q} + 3\hat{q} \left\langle \hat{q}, \frac{\vec{r}}{q} \right\rangle \right)$$



Flutberge auf Mond zu- und abgewandte Seite!

Höhe der Flut? Wasseroberfläche $\overset{!}{=}$ Äquipotenzialfläche des Potenzials zu Erdanziehung + Gezeitenkraft F

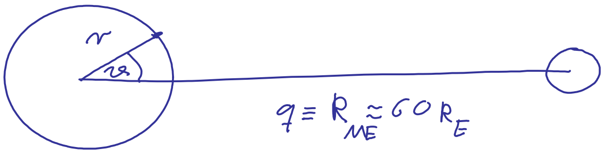
effektives Gravitationsfeld

$$\vec{g}(\vec{r}) = (\vec{F}_E + \vec{F}_b + \vec{F}_M)/m$$

$$= -G m_E \left(\frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{m_M}{m_E}\frac{\vec{r}}{q^3} - 3\frac{m_M}{m_E}\frac{\hat{q}}{q^3} \langle \hat{q}, \vec{r} \rangle \right)$$

besitzt Potenzial $\quad (\gamma = m_M/m_E \approx 1/81)$

$$\phi(\vec{r}) = -G m_E \left(\frac{1}{r} - \gamma \frac{r^2}{2q^3} + \frac{3}{2}\gamma \frac{\langle \hat{q}, \vec{r} \rangle^2}{q^3} \right) \qquad (*)$$



$q \equiv R_{ME} \simeq 60\, R_E$

$$r(\vartheta) = R_E + s(\vartheta)$$

$$\text{konst.} \stackrel{!}{=} \phi(r(\vartheta), \vartheta)$$

$$\rightarrow \quad \text{konst} = \frac{1}{R_E + s} - \gamma \frac{(R_E+s)^2}{2q^3} + \frac{3}{2q^3}\gamma (R_E+s)^2 \cos^2\vartheta$$

$$\simeq \frac{1}{R_E} - \frac{s}{R_E^2} - \frac{\gamma}{2q^3}(R_E^2 + 2R_E s + \cdots) + \frac{3}{2q^3}\gamma(R_E^2 + 2R_E s + \cdots)\cos^2\vartheta$$

in führender Ordnung von $s/R_E \ll 1$ also

$$\frac{s}{R_E} = -\frac{\gamma R_E^3}{2q^3} + \frac{3\gamma}{2q^3} R_E^3 \cos^2\vartheta = \frac{3}{2}\gamma\left(\frac{R_E}{q}\right)^3\left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3}\right)$$

d.h. $$\Delta s = s(0) - s(\pi/2) = \frac{3}{2}\underbrace{\frac{m_M}{m_E}}_{1/81}\Big(\underbrace{\frac{R_E}{R_{ME}}}_{1/60}\Big)^3 \cdot \underbrace{R_E}_{6\cdot 10^6\,\text{m}} = \underline{\underline{54\ \text{cm}}}$$

⌈ besser: (*) in Kugelkoordinaten lautet

$$\phi(r,\vartheta,\varphi) = -\frac{G m_E}{r}\left(1 + \frac{3}{2}\gamma\frac{r^3}{q^3}\left(\cos^2\vartheta - 1/3\right)\right)$$

wegen $\alpha := \frac{3}{2}\gamma\frac{R_E^3}{R_{ME}^3} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{81}\left(\frac{1}{60}\right)^3 = 8{,}6\cdot 10^{-8} \ll 1$

folgt aus $\phi(r,\vartheta) = \text{konst.}$ in guter Näherung

$$r(\vartheta) = R_E\left(1 + \alpha\cos^2\vartheta - \alpha/3\right)$$

d.h. $\Delta s = r(0) - r(\pi/2) = \alpha R_E = 54\ \text{cm}.$ ⌋