Ausblick: alternative Formulierung der Newtonschen Mechanik mittels Wirkungsfunktional und Hamiltonschen Extremal-Prinzip

→ einfache Behandlung von Zwangsbedingungen

→ Pfadintegralformulierung der QM, QFT (Feynman)

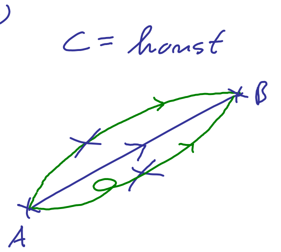
benötigen dazu:

Variationsrechnung: Funktional, Funktionalableitung, Euler-Lagrange-Gleichungen

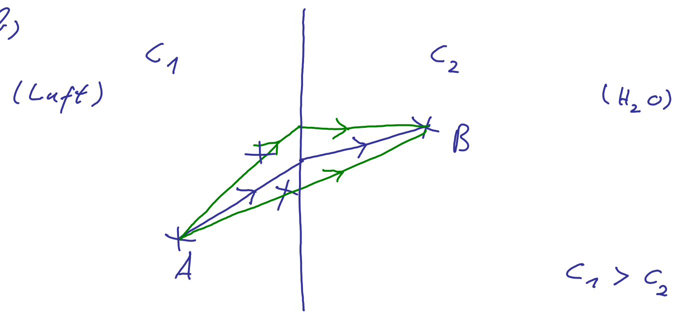
Gegenstand der Variationsrechnung sind Extremalisierungsprobleme, etwa:

1) Lichtausbreitung gemäß Fermatschen Prinzip: Lichtstrahl von A nach B nimmt immer den Weg kürzester Laufzeit!

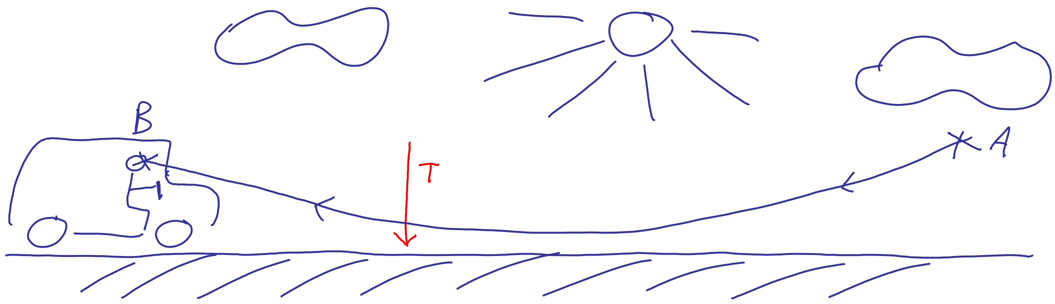
a)



b)



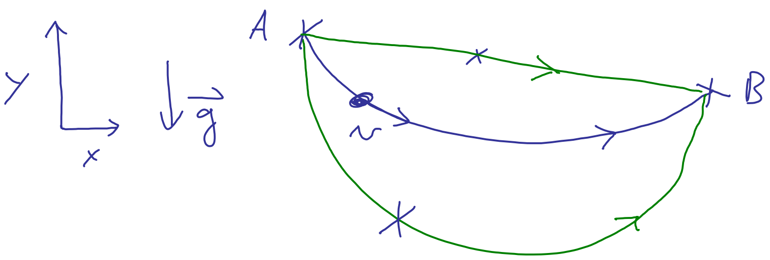
c)



$$c = c_0 (1 + \alpha T)$$

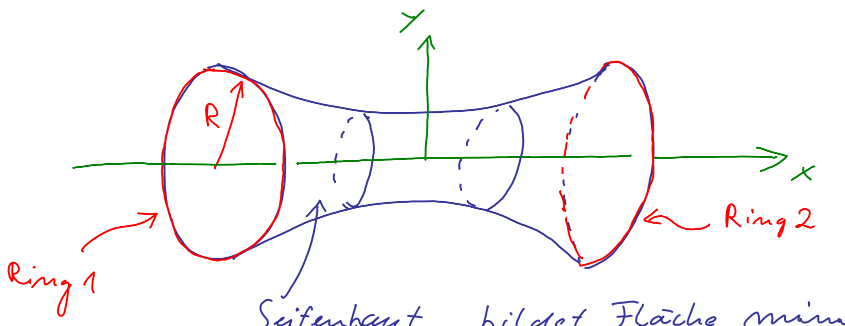
2) Brachistochronen-Problem (Johann Bernoulli, 1696)

oder: Wie baut man die schnellste Rutschbahn von A nach B?



$$E = \frac{m}{2} v^2 + m g y = \text{konst.}$$

3) Bestimmung einer Minimalfläche:



Seifenhaut, bildet Fläche minimalen Flächeninhalts, berandet durch Ringe 1 und 2.

In Problemen 1) – 3) ist Funktion ($\hat{=}$ Weg, Fläche) gesucht, die ein bestimmtes Funktional ($\hat{=}$ Laufzeit, Fläche) extremalisiert

Funktional: im einfachsten Fall eine

Abbildung J: Menge der glatten Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}^d$, $f(a)=y_a$, $f(b)=y_b$ $\longrightarrow$ $\mathbb{R}$

$$f \longmapsto J[f]$$

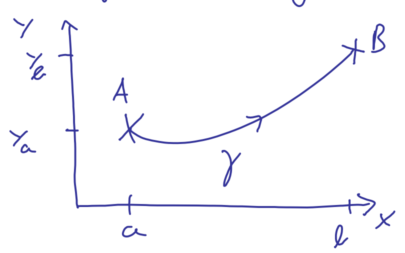
eckige Argumentklammern kennzeichnen Funktional

einfache Beispiele:

- $J[f] := \int_a^b dx\, f(x)$
- $J[f] := \int_a^b dx \sqrt{1 + f'(x)^2}$
- $\delta_{x_0}[f] := f(x_0) \quad \left(\equiv \int_a^b dx\, \delta(x-x_0)\, f(x) \right)$

Funktionale in Beispiele 1) – 3):

1) falls Weg eben: beschreibe Weg γ des Lichtstrahls durch Graph der Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$



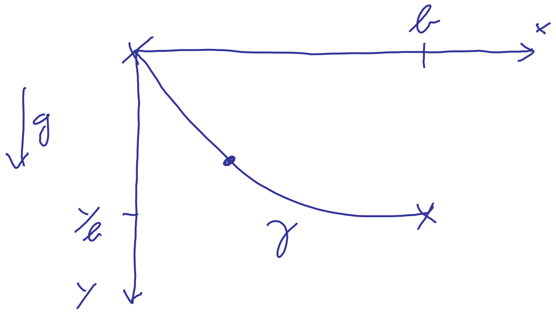
mit $f(a) = y_a$ und $f(b) = y_b$;

$$\to T = \int_\gamma \frac{d\ell}{c} = \frac{1}{c}\int_a^b \left(1 + f'(x)\right)^{1/2} dx$$

(dabei benutzt: $\Delta l = (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2} = (1 + f'^2(x))^{1/2} \Delta x$)

$\rightarrow$ Funktional: $T[f] = \int_a^b (1 + f'^2(x))^{1/2}\, dx$

2) Brachistochrone



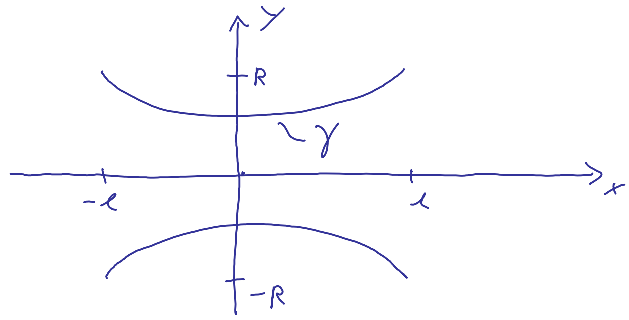
$0 \overset{!}{=} \frac{m}{2} v^2 - mgy$

$\rightarrow$ $v = \sqrt{2gy}$

Bahnkurve γ sei Graph der Fkt $f : [0, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$ und $f(b) = y_b$;

$\longrightarrow$ Laufzeit-Funktional: $T[f] = \int_\gamma \frac{dl}{v} = \int_0^b \frac{(1 + f'(x)^2)^{1/2}}{(2g f(x))^{1/2}}\, dx$

3) Minimalfläche



γ sei Graph der Fkt. $f : [-l, l] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(\pm l) = R$

$\longrightarrow$ Fläche $F[f] = \int_\gamma 2\pi \gamma_y\, dl = \int_{-l}^{l} 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$.

Wir sehen: Funktionale jeweils der Form

$$J[f] = \int_a^b L(f(x), f'(x))\, dx \quad , \qquad (*)$$

wobei L geeignete "Lagrange-Funktion" $L = L(f, f')$:

1) $L(f, f') = \sqrt{1 + f'^2}$

2) $L(f, f') = \sqrt{1 + f'^2} / \sqrt{2gf}$

3) $L(f, f') = 2\pi f \sqrt{1 + f'^2}$

Wie finden wir Extremstelle f_0 eines Funktionals $J[f]$ der Form (*) mit Lagrange-Fkt L ?

beachte: f_0 ist eine extremalisierende Funktion $f_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f_0(x)$!

finde notwendige Bedingung für das Vorliegen einer Extremalstelle:

Sei f_0 Extremalstelle des Funktionals $J[f] = \int_a^b L(f(x), f'(x))\, dx$ unter allen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a) = y_a$, $f(b) = y_b$;

variiere f_0 mittels Variation $\eta : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\eta(a) = \eta(b) = 0$ zu $f = f_0 + \varepsilon\eta$, d.h.

$$f(x) = f_0(x) + \varepsilon\,\eta(x),$$

ε ist dabei ein Parameter. Ist f_0 Extremstelle von J, so auch $\varepsilon_0 = 0$ Extremstelle von $\varepsilon \mapsto J[f_0 + \varepsilon\eta]$ und somit

$$0 \overset{!}{=} \frac{d}{d\varepsilon} J[f_0 + \varepsilon\eta]\Big|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(J[f_0 + \varepsilon\eta] - J[f_0]\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_a^b \underbrace{\left\{ L(f_0(x) + \varepsilon\eta(x), f_0'(x) + \varepsilon\eta'(x)) - L(f_0(x), f_0'(x)) \right\}}_{= \frac{\partial L}{\partial f}(f_0, f_0')\,\varepsilon\,\eta \,+\, \frac{\partial L}{\partial f'}(f_0, f_0')\,\varepsilon\,\eta'} dx$$

$$= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial f}(f_0(x), f_0'(x))\,\eta(x)\,dx + \int_a^b \frac{\partial L}{\partial f'}(f_0(x), f_0'(x))\,\eta'(x)\,dx$$

das zweite Integral wird durch P.I zu

$$\underbrace{\frac{\partial L}{\partial f'}(f_0, f_0')\,\eta\Big|_a^b}_{=0,\ \text{da}\ \eta(a) = \eta(b) = 0} - \int_a^b \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f'}(f_0, f_0') \right) \eta(x)\,dx$$

dies ergibt die Bedingung

$$0 \overset{!}{=} \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial f}(f_0(x), f_0'(x)) - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f'}(f_0(x), f_0'(x)) \right) \eta(x)\, dx$$

an die Extremstelle f_0 ; für <u>beliebige</u> η !

$\rightarrow$ Ist f_0 Extremstelle von $J[f] = \int_a^b L(f, f')\, dx$

so gilt

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial f}(f_0, f_0') + \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f'}(f_0, f_0') = 0}$$

<u>Euler-Lagrange-Gleichung</u> = notwendige Bedingung für Vorliegen eines Extr. in f_0

$$\frac{\delta L}{\delta f} := \frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f'}$$

ist die "<u>Variationsableitung</u> von L nach f"

beachte:

$$J[f + \Delta f] = J[f] + \int_a^b \frac{\delta L}{\delta f} \Delta f\, dx + \dots$$

(in Analogie zu $F(\vec{x} + \vec{\Delta x}) = F(\vec{x}) + \langle \operatorname{grad} F(\vec{x}), \vec{\Delta x} \rangle + \dots$)

<u>Beispiel</u>:

1) Lichtstrahl $\hat{=}$ Extremstelle f_0 des Laufzeitfunktionals $T[f]$ mit $L(f, f') = \sqrt{1 + f'^2}$

Euler-Lagrange Gl.: $\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f'} \overset{!}{=} 0$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \overset{!}{=} \frac{d}{dx} \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}} = \frac{f''}{\sqrt{}} - \frac{f'^2 f''}{\sqrt{}^{\,3}}$$

$$= \left(1 - \frac{f'^2}{1+f'^2}\right) \frac{f''}{\sqrt{}} = \frac{f''}{(1+f'^2)^{3/2}}$$

d.h. $f'' = 0$ und damit $f(x) = \alpha + \beta x$: <u>Gerade</u>!