Verallgemeinerung des bislang gezeigten:

<u>Funktionen ("Bahnen")</u>: $\quad q : [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$t \longmapsto q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$$

<u>Funktional ("Wirkung")</u>:

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t))\, dt$$

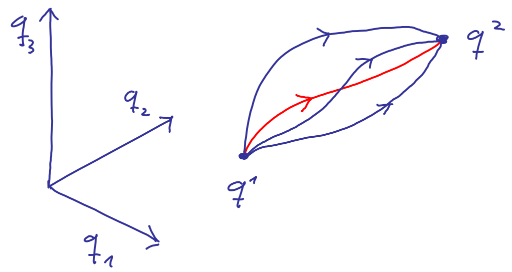
<u>Lagrange-Funktion</u> $\quad L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$L(q, \dot{q}) = L(\underbrace{q_1, \dots, q_n}_{\text{„Koordinaten"}}, \underbrace{\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n}_{\text{„Geschwindigkeiten"}})$$

<u>Variationsproblem</u>:

extremalisiere $S[q]$ unter allen Funktionen ("Bahnen")
$q : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^n$ mit Randbedingungen $q(t_1) = q^1$,
$q(t_2) = q^2$

$n = 3$



Variation eines (lokalen) Extremums $q^0 : [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{R}^n$

nach

$$q(t) = q^0(t) + \varepsilon\, \eta(t)$$

mit $\eta : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^n$, $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ führt mit denselben Argumenten wie im eindim. Fall auf

$$0 \stackrel{!}{=} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}(q^0(t), \dot{q}^0(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q^0(t), \dot{q}^0(t)) \right) \eta_i(t)\, dt,$$

gültig für <u>alle</u> η.

$\longrightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i}(q^\circ(t), \dot q^\circ(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}(q^\circ(t), \dot q^\circ(t)) \overset{!}{=} 0, \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n}$$

n Euler-Lagrange Gleichungen

$\hat{=}$ notwendige Bedingung für $q^\circ(t)$ lokales Extremum von $S[q] = \int L(q, \dot q)\, dt$

$\hat{=}$ n gekoppelte DGL 2. Ordnung zur Bestimmung von $q^\circ(t)$

Kürzer oft: $\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = 0$

<u>Hamiltonsches Prinzip</u>

wir betrachten konservatives N-Teilchen System:

nach Newton:

$$m_i \ddot{\vec r}_i(t) = \vec F_i(\vec r_1(t), \dots, \vec r_N(t)) \qquad (1)$$

$$\text{mit } \vec F_i = \underbrace{-\operatorname{grad} U_i(\vec r_i)}_{\vec F_i^{ex}} + \sum_{j \neq i} \underbrace{-\operatorname{grad} U_{ij}(\vec r_i - \vec r_j)}_{\vec F_{ij}^{int}} .$$

setze
$$q = (\vec r_1, \dots, \vec r_N) = (x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{N3})$$
$$\dot q = (\dot{\vec r}_1, \dots, \dot{\vec r}_N) = (\dot x_{11}, \dot x_{12}, \dots)$$

$$L(q, \dot q) = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} |\dot{\vec r}_i|^2}_{T(\dot q)} - \underbrace{\Big(\sum_i U_i(\vec r_i) + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j,\\ i\neq j}} U_{ij}(\vec r_i - \vec r_j)\Big)}_{U(q)}$$

Extremalisierung der <u>Wirkung</u> $S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot q(t))\, dt$ (mit Randbedingungen $q(t_1) = q^1$, $q(t_2) = q^2$) führt mit

$$\frac{\partial L}{\partial x_{i\nu}} = -\frac{\partial U}{\partial x_{i\nu}} = \underbrace{-\frac{\partial U_i(\vec r_i)}{\partial x_{i\nu}}}_{F^{ex}_{i\nu}} + \sum_{j\neq i} \underbrace{\frac{-\partial U_{ij}(\vec r_i - \vec r_j)}{\partial x_{i\nu}}}_{F^{int}_{ij\nu}}$$
$$= F_{i\nu}$$

und $\quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{i\nu}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_{i\nu}} = m_i \dot{x}_{i\nu}$

auf $3N$ Euler-Lagrange-Gleichungen

$$F_{i\nu}(q^\circ(t)) \overset{!}{=} m_i \ddot{x}_{i\nu} \quad \text{für } i = 1, \dots, N, \quad \nu = 1, 2, 3$$

d.h. genau $\quad \vec{F}_i(\vec{r}_1^{\,\circ}(t), \dots \vec{r}_N^{\,\circ}(t)) \overset{!}{=} m_i \ddot{\vec{r}}_i^{\,\circ}(t) \qquad (2)$

wir stellen fest: die Euler-Lagrange-Gleichungen (2) zur Wirkung $S = \int (T - U)\,dt$ sind genau die Newtonschen Bewegungsgleichungen (1) !

→ Hamiltonsche Prinzip der extremalen Wirkung

(William R. Hamilton 1834)
↳ 1805 – 1865

Die Newtonschen Bahnen $\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t)$ eines N-Teilchen Systems mit vorgegebenen Positionen bei Zeitpunkten t_1 und t_2 bilden genau die extremalisierende Bahn $q(t) = (\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t))$ der Hamiltonschen Wirkung

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t))\,dt$$

(unter vorgegebenen $q(t_1)$, $q(t_2)$) mit Lagrange-Fkt L als Differenz von kinetischer und potenzieller Energie, $\quad L = T - U$.

Hamiltonsche Formulierung ist invariant unter

Koordinatenwechsel:

$$\mathbb{R}^n \longleftrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$q = (q_1, \dots, q_n) \longmapsto r(q) = (r_1(q), \dots, r_n(q))$$

$$q(r) \longleftarrow\!\!| \quad r$$

Bahn: $q(t) \longrightarrow r(t) = r(q(t))$

⌈ z.B. Wechsel von 2D kartesische auf Polarkoordinaten:

$$(x, y) \longmapsto \left((x^2+y^2)^{1/2},\ \arctan y/x \right) = (r, \varphi)$$

$$(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi) \longleftarrow (r, \varphi)$$ ⌋

T und U und damit auch $L \equiv T - U$ sind per definitionem <u>unabhängig</u> von den gewählten Koordinaten;

d.h.: für bel. Bahn $q(t)$ und deren Transformierte $r(t) = r(q(t))$ ist

$$L_q(q(t), \dot q(t)) \overset{!}{=} L_r(r(t), \dot r(t))$$

Lagrange-Fkt im q-Koordinaten

Lagrange-Fkt im r-Koordinaten

⌈ $L_{(x,y)} = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2) - U(x, y)$; $L_{(r,\varphi)} = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) - U(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

$$(x(t), y(t)) = (r(t)\cos\varphi(t),\ r(t)\sin\varphi(t)) \longleftarrow (r(t), \varphi(t))$$

$$(\dot x(t), \dot y(t)) = \dot r(t)(\cos\varphi, \sin\varphi) + r(t)(-\sin\varphi, \cos\varphi)\,\dot\varphi$$

$$L_{x,y}(x, y, \dot x, \dot y) \overset{!}{=} \frac{m}{2}\left(\dot r(t)^2 + r(t)^2\dot\varphi(t)^2\right) - U(r(t)\cos\varphi(t), r(t)\sin\varphi(t)) \overset{!}{=} L_{r,\varphi}(r, \varphi, \dot r, \dot\varphi)$$ ⌋

<u>einfache Folgerung</u>:

$q^\circ(t)$ extremalisiert $S_q[q] = \int_{t_1}^{t_2} L_q(q,\dot q)\,dt$ $\iff$ $r^\circ(t) := r(q^\circ(t))$ extremalisiert $S_r[r] = \int_{t_1}^{t_2} L_r(r,\dot r)\,dt$

$\Updownarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\Updownarrow$

$$\boxed{\frac{\partial L_q(q^\circ,\dot q^\circ)}{\partial q_i} \overset{!}{=} \frac{d}{dt}\frac{\partial L_q(q^\circ,\dot q^\circ)}{\partial \dot q_i} \quad \overset{!}{\iff} \quad \frac{\partial L_r(r^\circ,\dot r^\circ)}{\partial r_i} \overset{!}{=} \frac{d}{dt}\frac{\partial L_r(r^\circ,\dot r^\circ)}{\partial \dot r_i}}$$

Koordinatenunabhängigkeit der Euler-Lagrange-Gleichungen

Bsp.: 1) ELG im 2D kart. Koord. $\iff$ 2D Newtongleichung

$\vec F = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$, $\vec r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$$\vec F = m\ddot{\vec r} = m(\ddot r - r\dot\varphi^2)\underbrace{\vec e_r}_{=(\cos\varphi,\sin\varphi)} + m(2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi)\underbrace{\vec e_\varphi}_{=(-\sin\varphi,\cos\varphi)}$$

d.h. $F_r = m(\ddot r - r\dot\varphi^2)$ $\quad$ (1a) $\qquad (\vec F = F_r\vec e_r + F_\varphi \vec e_\varphi)$

$F_\varphi = m(2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi)$ $\quad$ (1b)

2) ELG in Polarkoordinaten:

$$L(r,\varphi,\dot r,\dot\varphi) = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) - U(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

$$\rightarrow \frac{\partial L}{\partial\varphi} = \partial_x U(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\sin\varphi - \partial_y U(r\,\text{"}, \text{"}\ \text{"})\, r\cos\varphi = -r\begin{pmatrix}\partial_x U \\ \partial_y U\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin\varphi \\ \cos\varphi\end{pmatrix} = r F_\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = \frac{d}{dt} m r^2\dot\varphi = m r(2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi)$$

d.h. $\frac{\partial L}{\partial\varphi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} \iff F_\varphi = m(2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi) \iff$ (1b) ✓

$\frac{\partial L}{\partial r} = m r\dot\varphi^2 + F_r$, $\quad \frac{\partial L}{\partial\dot r} = m\dot r$

d.h. $\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot r} \iff m r\dot\varphi^2 + F_r = m\ddot r \iff$ (1a) ✓