

1) Nachtrag zum Fermatschen Prinzip: Lichtstrahl folgt

Weg $\tau \mapsto \vec{r}(\tau)$ kürzester Laufzeit

$$(1) \quad T[\vec{r}] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{|\dot{\vec{r}}(\tau)|}{c(\vec{r}(\tau))} d\tau = \frac{1}{c_0} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \underbrace{n(\vec{r}(\tau)) |\dot{\vec{r}}(\tau)|}_{L(\vec{r}(\tau), \dot{\vec{r}}(\tau))} d\tau$$

Brechungsindex

weil ELG zu (1): $\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$

$\Leftrightarrow$ Strahlengleichung: $\frac{d}{d\tau} (n(\vec{r}(\tau)) \dot{\vec{r}}(\tau)) = \text{grad } n(\vec{r}(\tau))$

$\Leftrightarrow$ Wellengleichung $\Delta \vec{E} = \frac{n^2}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$, $\Delta \vec{B} = \dots$

im Grenzfall $|\text{grad } n| \ll h$ (Wellenzahl)

(Maxwellsche ED!)

2) Nachtrag zur Transformation der Lagrange-Fkt bei

Koordinatenwechsel: $r: q \mapsto r(q)$

$r^{-1} \equiv q: r \mapsto q(r)$

$L_q \xrightarrow{?} L_r$

$\downarrow$
 $dq_r: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($T_r \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n$)

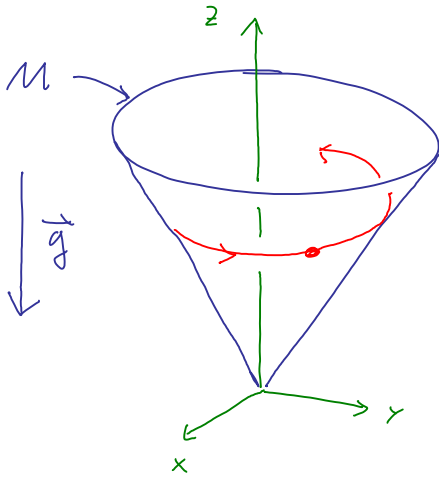
$\dot{r} \mapsto dq_r(\dot{r}) =: \dot{q}(r, \dot{r})$

dann $L_r(r, \dot{r}) := L_q(q(r), \dot{q}(r, \dot{r}))$

brachte $dq_r(\dot{r}) = \left. \frac{d}{dt} q(r + t\dot{r}) \right|_{t=0} !$

Bewegung unter Zwangsbedingungen, Lagrangische Mechanik V13

Motivation: Bewegung eines MPs der Masse m auf
Kreiskegelmantel unter Schwerkraft $\vec{F}_g = m\vec{g}$.



Bahn $\vec{r}(t) = ?$

naiv: $m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}_g + \vec{F}_z$

Zwangskraft $\vec{F}_z$ gewährleistet,
dass MP für alle Zeiten auf
Kegelmantel M ($\equiv$ Zwangsfläche)

allgemein

Mechanisches System mit n verallgemeinerten
Koordinaten $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n) \in \mathbb{R}^n$ und La-
grange Fkt. $\tilde{L}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$ genüge zusätzlich
 k Zwangsbedingungen, gegeben durch

$$h(\tilde{q}) \stackrel{!}{=} \vec{0},$$

mit $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$\tilde{q} \mapsto (h_1(\tilde{q}), \dots, h_k(\tilde{q}))$$

$\rightarrow$ für alle t Bahn $\tilde{q}(t)$ auf Zwangsfläche $M = h^{-1}(\vec{0})!$

Bestimmung der Bahn:

transformiere auf $n-k$ unabhängige Koordinaten

$$q: \mathcal{M}^{\subset \mathbb{R}^n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$$
$$\tilde{q} \longmapsto q(\tilde{q})$$

mit Lagrange fkt $L(q, \dot{q})$ definiert durch

$$L(q(t), \dot{q}(t)) \stackrel{!}{=} \tilde{L}(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t))$$

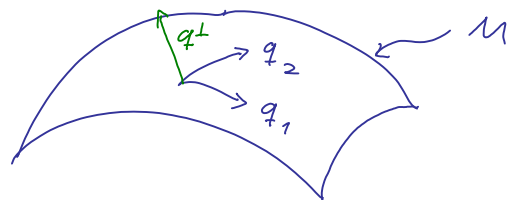
für bel. Bahnen $\tilde{q}(t)$ in M und $q(t) := q(\tilde{q}(t))$.

Bahn $q(t)$ genügt den (Euler-) Lagrange-Gleichungen in unabhängigen Koordinaten, d.h. $q(t)$ genügt den ELG zu $L(q, \dot{q})$.

Begründung wie folgt:

- vervollständige $n-k$ unabhängige Koordinaten $q = (q_1, \dots, q_{n-k})$ durch k transversale Koordinaten $q^\perp = (q_1^\perp, \dots, q_k^\perp)$ zu n Koordinaten

$\tilde{q} = (q, q^\perp)$, etwa:

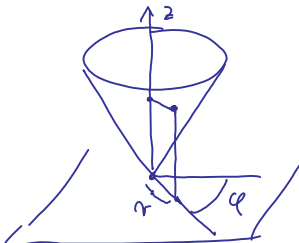


- realisiere Zwangsbedingung durch transversales Potenzial $U_\perp(\tilde{q}) := \frac{\lambda}{2} |h(\tilde{q})|^2$, $\lambda \rightarrow \infty$
- extremalisierende Bahn $\tilde{q}_0(t) = (q_0(t), q_0^\perp(t))$ der Gesamtwirkung $\tilde{S}[\tilde{q}] = \int (\tilde{L}(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t)) - U_\perp(q(t))) dt$ erfüllt notwendig $q_0^\perp(t) = \vec{0}$; damit ist $q_0(t)$ Extremalisierende der Wirkung

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t)) dt \stackrel{!}{=} \tilde{S}[\tilde{q} = (q, q_\perp = 0)]$$

d.h. $q_0(t)$ erfüllt ELG zu $L(q, \dot{q})$. ✓

Beispiel: • unabhängige Koordinaten (r, φ) :



$$(r, \varphi) \mapsto \vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ nr \end{pmatrix}$$

$$n = \frac{z}{r} = \cot \alpha$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) &= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + (r \dot{\varphi})^2 + u^2 \dot{r}^2) - m g u r \\
 &= \frac{m}{2} ((1+u^2) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - m g u r
 \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \underline{ELG}: \quad 1) \quad 0 = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \stackrel{!}{=} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\varphi})$$

d.h. $l_z := m r^2 \dot{\varphi}$ ist konstant

$$2) \quad \frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\varphi}^2 - m g u \stackrel{1)}{=} \frac{l_z^2}{m r^3} - m g u$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m (1+u) \ddot{r}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d.h.} \quad m (1+u) \ddot{r} &= l_z^2 / m r^3 - m g u \\
 &= - \partial_r \left(\underbrace{\frac{l_z^2}{2 m r^2} + m g u r}_{U_{\text{eff}}(r)} \right)
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow r(t) \stackrel{\wedge}{=} 1D$ Bewegung eines Teilchens der Masse $m(1+u)$ im Potenzial $U_{\text{eff}}(r)$.