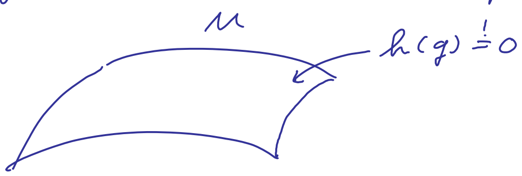
## Zeitabhängige Zwangsbedingungen

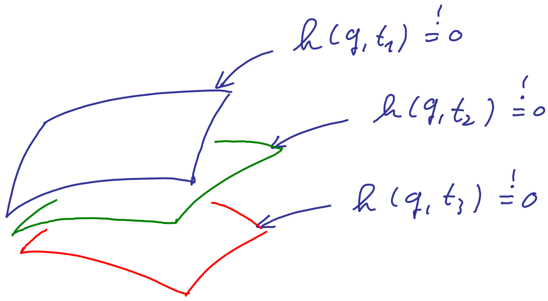
bisher Zwangsbedingungen (und damit Zwangsfläche $\mathcal{M}$)

zeit<u>un</u>abhängig




nun betrachten wir zeitlich variable Zwangsfläche

$\mathcal{M}_t$:




gegeben durch

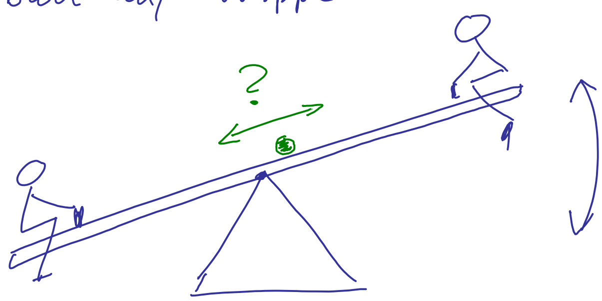
$$\mathcal{M}_t = \{ q \in \mathbb{R}^n \mid h(q,t) = 0 \}$$

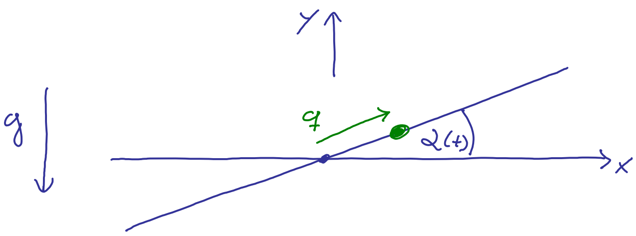
mit $h: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$, $q,t \mapsto h(q,t)$ hinreichend glatt.

( 2 × diffbar in $q$,
1 × diffbar in $t$ )

<u>Zwangsbewegung</u>: für alle $t$ $q(t) \in \mathcal{M}_t$ !

<u>Beispiel</u>: Ball auf Wippe




$\alpha(t) = \vartheta \sin \omega t$

$q(t) = ?$

<u>naiv</u>: "zeitabhängige" unabhängige Koordinate

$$(q,t) \longmapsto \vec{r}(q,t) = \begin{pmatrix} q \cos\alpha(t) \\ q \sin\alpha(t) \end{pmatrix}$$

→ zeitabhängige Lagrange-Fkt

$$L(q,\dot q,\underset{\approx}{t}) = \frac{m}{2}\left(\dot q^2 + (q\,\dot{\underset{\approx}{\alpha(t)}})^2\right) - m g q \sin \underset{\approx}{\alpha(t)}$$

→ ELG:
$$\frac{\partial L}{\partial q}(q(t),\dot q(t),t) \overset{!}{=} \underset{\approx}{\frac{d}{dt}} \frac{\partial L}{\partial \dot q}(q(t),\dot q(t),\underset{\approx}{t})$$

Bahngleichung für $q(t)$ !?!

Ob das richtig ist?

Wir holen etwas aus:

1) Zeitabhängige Lagrange-Fkten: Extremalen der Wirkung?

2) Zeitabhängige Koordinatentransformation: Invariant der ELG?

3) Zeitabhängige Zwangsbedingungen

1) $q^0(t)$ sei extreme Bahn der Wirkung

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t),\dot q(t),\underset{\approx}{t})\,dt$$

unter allen Bahnen $q:[t_1,t_2]\to\mathbb{R}^n$ mit $q(t_1)=q^1$, $q(t_2)=q^2$.

dann
$$\eta(t_1)=\eta(t_2)=0$$

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} S[q_0+\varepsilon\eta] = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q}(q^0(t),\dot q^0(t),t)\cdot\eta(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot q}(q^0(t),\dot q^0(t),t)\cdot\dot\eta(t)\right\} dt$$

$$\overset{P.I.}{=} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q}(q^0(t),\dot q^0(t),t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}(q^0(t),\dot q^0(t),t)\right\}\cdot\eta(t)\,dt$$

d.h.
$$\frac{\partial L}{\partial q_i}(q^0(t),\dot q^0(t),t) \overset{!}{=} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}(q^0(t),\dot q^0(t),t) \quad ✓$$

2) Zeitabhängige Koordinatentransformation

$$r_t : \underset{\mathbb{R}^n}{q} \longmapsto \underset{\mathbb{R}^n}{r_t(q)}$$

$$q_t : q_t(r) \longleftarrow r$$

für bel. Bahn $q(t) \longrightarrow r(t) := r_t(q(t))$

gelte

$$L_q(q(t), \dot{q}(t)) \overset{!}{=} L_r(r(t), \dot{r}(t), t)$$

(≡ Transformationsvorschrift für $L$!)

dann offenbar (s.o.)

$q_0(t)$ extremalisiert $S_q[q] = \int L_q(q, \dot{q})\, dt$ $\iff$ $r_0(t) := r_t(q_0(t))$ extrem $S_r[r] = \int L_r(r, \dot{r}, t)\, dt$

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$

$$\frac{\partial L_q}{\partial q_i}(q_0(t), \dot{q}_0(t)) \overset{!}{=} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q_0(t), \dot{q}_0(t)) \quad \overset{!}{\iff} \quad \frac{\partial L_r}{\partial r_i}(r_0(t), \dot{r}_0(t), t) \overset{!}{=} \frac{d}{dt}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{r}_i}(r_0(t), \dot{r}_0(t), t)$$

d.h. ELG auch für zeitabhängige Lagrange-Fkn gültig!

3) <u>Zeitabhängige Zwangsbedingungen</u>:

$$h(q, t) \overset{!}{=} 0 \quad \leadsto M_t \qquad \text{mit } h: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

transformiere <u>zeitabhängig</u> auf $n-k$ unabhängige Koord.en

$$q_t : \underset{\subset \mathbb{R}^n}{M_t} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$$
$$\tilde{q} \longmapsto q_t(\tilde{q})$$

mit Lagrange-Fkt $L(q, \dot{q}, t)$ definiert durch

$$L(q(t), \dot{q}(t), t) \overset{!}{=} \tilde{L}(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t)$$

für bel. Bahnen $\tilde{q}(t)$ in $M_t$ und $q(t) := q_t(\tilde{q}(t))$

Wegen 1) und 2) folgt genau wie im zeitunabhängigen Fall:

Bahn $q(t)$ genügt den ELGen in zeitabhängigen, unabhängigen Koordinaten, d.h. $q(t)$ genügt den ELG zu $L(q, \dot{q}, t)$.

Fazit: die naive Anwendung der Lagrange-Gleichungen ist auch für zeitabhängige Zwangsbedingungen richtig!

Zurück zur Wippe: $L(q, \dot{q}, t) = \frac{m}{2}(\dot{q}^2 + q^2 \dot{\alpha}(t)^2) - mgq \sin\alpha(t)$

$$\alpha(t) = \vartheta \sin\omega t, \quad (\vartheta \ll 1)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q} = m q \vartheta^2 \omega^2 \cos^2\omega t - m g \vartheta \sin\omega t$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

d.h. $$\boxed{\ddot{q} = \underbrace{\vartheta^2 \omega^2 \cos^2\omega t \, q}_{\mathrm{I}} - \underbrace{g\vartheta \sin\omega t}_{\mathrm{II}}}$$

grob:

für $|q|\vartheta^2\omega^2 \ll g\vartheta \iff |q| \ll \frac{g}{\vartheta\omega^2} =: \ell$

Term II dominant: d.h. $\ddot{q} = -g\vartheta \sin\omega t$,

$\rightarrow q(t) \simeq \frac{g\vartheta}{\omega^2} \sin\omega t$, für Auslenkungen $\ll \ell$

also Oszillation mit Amplitude $a = \frac{g\vartheta}{\omega^2} \; (= \vartheta^2 \ell \ll \ell)$ ✓

für $|q| \gg \ell$ Term I dominant:

d.h. $\ddot{q} = \underbrace{(\vartheta^2\omega^2\cos^2\omega t)}_{\lambda(t)} q$

wg. $\overline{\lambda(t)} = \frac{\vartheta^2\omega^2}{2} \Rightarrow q(t) \approx e^{+\frac{\vartheta^2\omega^2}{2}t} q_0$. etc.