Verallgemeinerter Impuls

$q = (q_1, \dots, q_n)$: verallg. Koordinaten / unabhängige Koordinaten

$\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$: verallg. Geschwindigkeiten

$\rightarrow$ Lagrange-Fkt $L(q, \dot{q})$

verallg. Impuls zur Koordinate q_i:

$$\boxed{p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q})}$$

beachte: $p_i = p_i(q, \dot{q})$

im Falle eines Newt. Systems mit $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2}|\dot{\vec{r}}|^2 - U(\vec{r})$ übereinstimmend mit Newtonschen Impuls:

$$p_i \underset{\text{Def.}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = m\dot{x}_i \underset{\text{Def.}}{=} p_i^{\text{Newton}} \quad \checkmark$$

oft hilfreich:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_i \text{ konstant !}}$$

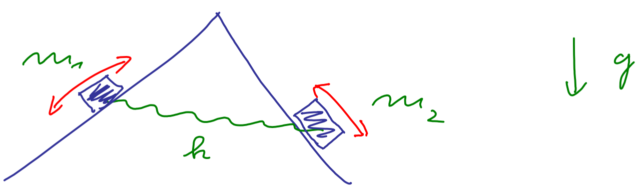
$\left(\text{denn} \quad \dot{p}_i \overset{\text{Def.}}{=} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \overset{\text{ELG}}{=} \frac{\partial L}{\partial q_i} \right)$

z.B. $\quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi})$ bei MP auf Kegelmantel

wegen $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ konstant !

Kleine Schwingungen um stabiles Gleichgewicht

etwa:



Wie verhält sich System bei kleinen Auslenkungen aus stabiler Gleichgewichtslage ?

Lösung des Problems mittels <u>allgemeinen Verfahrens</u>:

allg. Mechanisches System (evtl. mit Zwangsbedingungen) beschrieben durch unabhängige Koord. $q = (q_1, \dots, q_n)$ und Lagr.-Fkt $L(q, \dot q)$ befinde sich im <u>stabilen Gleichgewicht</u> $q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$; demnach $q(t) = q^*$ Lösung der ELG,

somit $\frac{\partial L}{\partial q_i}(q^*, 0) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}(q^*, 0) \equiv 0$,

d.h. $$\boxed{\frac{\partial U}{\partial q_i}(q^*) = 0}\ ; \quad \checkmark$$

<u>Stabilität</u> erfordert <u>Minimum</u> von U in q^*; <u>hinreichend</u> dafür ist <u>Positivität</u> der <u>Hesse-Matrix</u>

$$H_U(q^*) = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}(q^*) \right)_{ij}$$ von U in q^*.

- beschreibe <u>kleine Auslenkung</u> aus q^* durch neue Koord.
$$x := q - q^* \ ;$$

- schreibe allg. Lagrange-Fkt
$$L(q, \dot q) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}(q)\, \dot q_i \dot q_j - U(q)$$
mittels positiver <u>Massenmatrix</u> $\underline{\underline{M}}(q) := (m_{ij}(q))_{ij} = \underline{\underline{M}}^T(q)$

als $$L(q, \dot q) = \frac{1}{2} \dot q^T \underline{\underline{M}}(q)\, \dot q - U(q)$$

- bestimme $L^*(x, \dot x)$ durch Entwicklung in $x, \dot x$

bis einschließlich 2 Ordnung:

$$U(x) = \underbrace{U(q^*)}_{\text{OBdA } = 0} + \sum_i \underbrace{\frac{\partial U}{\partial q_i}(q^*)\, x_i}_{=0} + \frac{1}{2}\sum_{ij} \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}(q^*)\, x_i x_j$$

$$\cancel{+\, \mathcal{O}(x_i)^3}$$

d.h. $\boxed{U(x) = \frac{1}{2} x^T \underline{\underline{U}}\, x}$ mit positiver

Matrix $\underline{\underline{U}} = H_U(x) = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}(q^*) \right) = \underline{\underline{U}}^T$

Wegen $\dot{x} = \dot{q}$

$$T(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^T \underbrace{\underline{\underline{M}}(q^* + x)}_{= \underline{\underline{M}}(q^*) + \sum \frac{\partial \underline{\underline{M}}}{\partial q_i} x_i} \dot{x} \qquad = \frac{1}{2} \dot{x}^T \underline{\underline{M}}(q^*)\, \dot{x}$$

$$\cancel{+\, \mathcal{O}(x_i \dot{x}_j \dot{x}_e)}$$

d.h $\boxed{T(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^T \underline{\underline{M}}\, \dot{x}}$ mit $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}}(q^*)$

also $\boxed{L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^T \underline{\underline{M}}\, \dot{x} - \frac{1}{2} x^T \underline{\underline{U}}\, x}$

<u>ELG</u>:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{1}{2} \partial_{x_i} \sum_{lj} x_l U_{lj} x_j = -\sum_j U_{ij} x_j = -(\underline{\underline{U}} x)_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \dots = (\underline{\underline{M}} \dot{x})_i$$

also $\boxed{\underline{\underline{M}} \ddot{x} + \underline{\underline{U}}\, x = 0}$ lineare <u>DGL</u> 2. Ord. für $x(t)$,

Lösung durch <u>Exponentialansatz</u>

$$x(t) = e^{\pm i\omega t} u \qquad \rightarrow \qquad \ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$$

führt auf $$(\omega^2 \underline{\underline{M}} - \underline{\underline{U}})\, u = 0 \qquad (1)$$

<u>beachte</u>: imaginären Exponent wegen Positivität von $\underline{\underline{M}}$ und $\underline{\underline{U}}$ erforderlich: $x(t) = e^{\pm \lambda t} u$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\rightarrow (\lambda^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{U}})\, u = 0 \rightarrow u^T (\lambda^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{U}})\, u = 0 \rightarrow u \overset{!}{=} 0$$

Ex. nicht-trivialer Lösungen x_0 erfordert

$$\boxed{\det(\omega^2 \underline{\underline{M}} - \underline{\underline{U}}) = 0}$$

d.h. die Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des Polynoms n-ten Grades

$$P(\lambda) := \det(\lambda \underline{\underline{M}} - \underline{\underline{U}})$$

sind die Quadrate der Eigenfrequenzen $\omega_1, \dots, \omega_n$;

$$\omega_\ell = \sqrt{\lambda_\ell}$$

die (normierten) Lösungen $u_\ell \in \mathbb{R}^n$ der linearen Gleichungen

$$(\omega_\ell^2 \underline{\underline{M}} - \underline{\underline{U}})\, u_\ell = 0$$

sind die entsprechenden Eigenmoden der Eigenschwingung

$$\boxed{X_\ell(t) = \mathrm{Re}\; e^{i\omega_\ell t}\, u_\ell}$$

Die Komponenten von $X \in \mathbb{R}^n$ bzg. der ONB $(u_1, \dots, u_n)$ bilden die Normalkoordinaten $Q(X) = (Q_1(x), \dots, Q_n(x))$ von X.

Offenbar gilt für Bahn $X(t)$ in Normalkoordinaten $Q(t) := Q(X(t))$:

$$\ddot{Q}_\ell(t) = -\omega_\ell^2\, Q(t) \quad ;$$

ELG!

hieraus folgern wir:

$$L(Q, \dot{Q}) = \frac{1}{2}\left(\sum_\ell \dot{Q}_\ell^2 - \omega_\ell^2 Q^2\right)$$