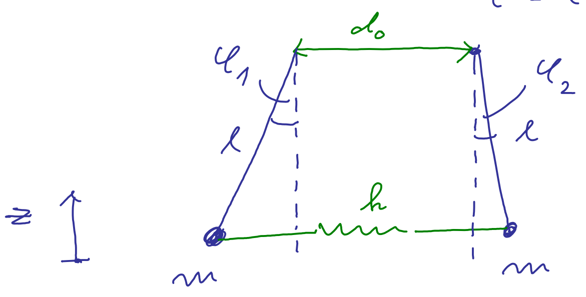
Beispiel: <u>gekoppelte Pendel</u>

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2), \quad \varphi^* = (0,0), \quad X = \varphi - \varphi^* = \varphi$$



$$T = \frac{m}{2} \ell^2 (\dot\varphi_1^2 + \dot\varphi_2^2)$$

$$= \frac{1}{2} m \ell^2 \dot\varphi^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dot\varphi$$

$$\Rightarrow M = m \ell^2 \mathbb{1}$$

$$U = mg(z_1 + z_2) + \frac{k}{2}(d - d_0)^2$$

$$= mg\ell(1 - \cos\varphi_1 + 1 - \cos\varphi_2) + \frac{k}{2}\ell^2 \left\{ (\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)^2 + (1 - \cos\varphi_1 + 1 - \cos\varphi_2)^2 \right\}$$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2} mg\ell (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{k}{2}\ell^2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2$$

bis einschl. 2. Ord. in φ

$$= \frac{1}{2} mg\ell\, \varphi^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varphi + \frac{1}{2} k \ell^2 \varphi^T \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \varphi$$

$$= \frac{1}{2} \varphi^T \begin{pmatrix} mg\ell + k\ell^2 & -k\ell^2 \\ -k\ell^2 & mg\ell + k\ell^2 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2} \varphi^T \underline{\underline{U}} \varphi$$

$$0 \stackrel{!}{=} \det(\lambda m \ell^2 \mathbb{1} - \underline{\underline{U}})$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \det\left(\lambda \mathbb{1} - \begin{pmatrix} g/\ell + k/m & -k/m \\ -k/m & g/\ell + k/m \end{pmatrix}\right)$$

$$\rightarrow \quad (\lambda - (g/\ell + k/m))^2 = (k/m)^2$$

d.h. $$\lambda_{1/2} = \frac{g}{\ell} + \frac{k}{m} \mp \frac{k}{m} = \begin{cases} g/\ell \\ g/\ell + 2k/m \end{cases}$$

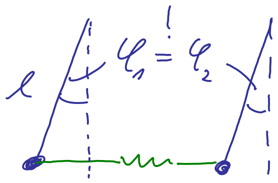
<u>Eigenfrequenzen</u> sind also $\omega_1 = \sqrt{g/\ell}$

$$\omega_2 = \sqrt{g/\ell + \frac{2k}{m}}$$

<u>Eigenmoden</u>: $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

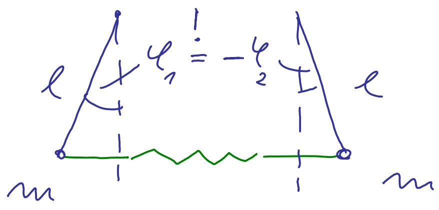
(erfüllen offenbar $(\lambda_{1/2} M - U) u_{1/2} = 0$)

Eigenschwingung $\underline{\mathrm{Re}\, e^{i\omega_1 t} u_1}$:



$\omega_1 = \sqrt{g/l}$ ✓

Eigenschwing. $\underline{\mathrm{Re}\, e^{i\omega_2 t} u_2}$:



$$\omega_2 = \sqrt{g/l + k/m} \quad (> \omega_1)$$

Starrer Körper : Trägheitstenso, Euler-Gleichungen

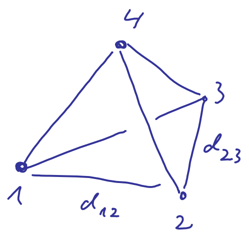
Starrer Körper = N ($\gg 1$) Massenpkte (m_i, $\underline{r}_i$)

mit Zwangsbedingungen derart, dass

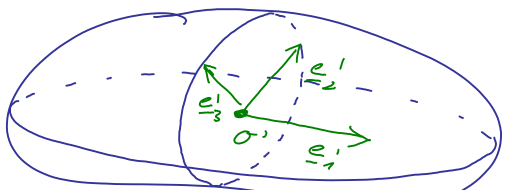
<u>Abstände konstant</u>:

$$|\underline{r}_i(t) - \underline{r}_j(t)| = d_{ij} \qquad (i<j)$$

etwa



,



<u>Kinematik des starren Körpers</u> : Lage eindeutig beschrieben durch

1) Position $\underline{o}'$ eines <u>körperfesten Punkts</u>

2) körperfeste ONB $\underline{\underline{B' = (\underline{e}_1', \underline{e}_2', \underline{e}_3')}}$

bzgl. inertialem Koord.-syst $(\underline{o}, B = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3))$

("raumfest")

gelte

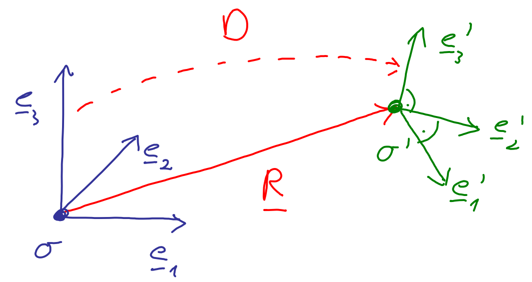
$$\sigma' = \sigma + \underline{R}(t) \qquad (\text{also } \underline{R}(t) = \overrightarrow{\sigma\sigma'})$$

$$B'(t) = D(t)\, B \;, \quad \text{d.h.} \quad \underline{e}_i'(t) = D(t)\, B$$

mit <u>Ortsvektor</u> $\underline{R} \in V$ und <u>Rotation</u> $D \in SO(3)$

$\swarrow$ 3 Parameter $\qquad\qquad$ $\swarrow$ 3 Parameter

→ starrer Körper besitzt $\underline{\underline{6}}$ Freiheitsgrade.



<u>Dynamik des starren Körpers:</u> wie verhalten sich $\underline{R}(t)$ und $D(t)$ unter vorgegebener Kraft $\underline{F}^{ex}$ und Drehmoment $\underline{M}^{ex}$?

<u>Dynamik der Translation</u> des <u>Schwerpunkts</u> $\underline{\underline{\sigma' \equiv S}}$ des Körpers bestimmt durch <u>Impulssatz</u>:

Gesamtimpuls $\underline{P} = M \dot{\underline{R}}$ genügt $\dot{\underline{P}} = \underline{F}^{ex}$

→ $M \ddot{\underline{R}} = \underline{F}^{ex}$ ✓

zB. $\underline{F}^{ex} = 0$ → $\underline{R}(t)$ geradlinig gleichförmig.

<u>Dynamik der Rotation</u> wesentlich komplizierter:

<u>Plan</u>: (i) bestimme <u>Gesamtdrehimpuls</u> $\underline{L}$ bzgl. σ' → $\underline{L}(\underline{\omega})$

(ii) nutze <u>Drehimpulssatz</u>: $\dot{\underline{L}} = \underline{M}^{ex}$

→ Bwgs-Gl. für $\underline{\omega}(t)$ (<u>Euler-Glen</u>)

benötigen dazu Darstellung von $\underline{L}, \dot{\underline{L}}$ in Komponenten bzgl. raumfester ONB B ($\to \vec{L}$) und körperfester ONB $B' = D B$ ($\to \vec{L}'$).

Erinnerung:

Darstellung eines Vektors $\underline{u}$ in Komponenten

$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ bzgl. B (raumfest) und in Komp.

$\vec{u}' = \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{pmatrix}$ bzgl. B' (körperfest); gelte $B' = D B$,

$$\vec{u} \overset{?}{\longleftrightarrow} \vec{u}'$$

ausgehend von $\sum_i u_i \underline{e}_i \overset{(1)}{=} \underline{u} \overset{(2)}{=} \sum_i u_i' \underline{e}_i'$

folgt $u_\ell' = \langle \underline{e}_\ell', \underline{u} \rangle = \sum_i \langle \underline{e}_\ell', \underline{e}_i \rangle u_i$,

mit $\langle \underline{e}_\ell', \underline{e}_i \rangle = \langle D \underline{e}_\ell, \underline{e}_i \rangle = \langle \underline{e}_\ell, D^T \underline{e}_i \rangle \equiv (D^T)_{\ell i}$

also $u_\ell' = \sum_i (D^T)_{\ell i} u_i$, d.h. $\boxed{\vec{u}' = \underline{\underline{D}}^T \vec{u}}$ (3)

wg. $\underline{\underline{D}}^T = \underline{\underline{D}}^{-1}$ (Orthogonalität!) also auch

$\boxed{\vec{u} = \underline{\underline{D}}\, \vec{u}'}$ (4) (auch: $u_\ell = D_{\ell m} u_m'$)

(3) und (4) gelten insbesondere für zeitabhängigen Vektor $\underline{u}(t)$ und zeitabhängige Rotation $D(t)$,

sei für diesen Fall also $\underline{v}(t) = \frac{d}{dt} \underline{u}(t) \equiv \dot{\underline{u}}$ die „Geschwindigkeit" des Vektors $\underline{u}(t)$;

da B konstant, offenbar $\vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{u}$ wie aber lautet $\vec{v}'$?

Wir rechnen: $\vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{u} \overset{(4)}{=} \frac{d}{dt} D \vec{u}' = \dot{D} \vec{u}' + D \dot{\vec{u}}'$,

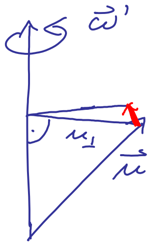
Linksmultiplikation mit D^T führt auf

$$D^T \vec{v} = D^T \dot{D}\, \vec{u}\,' + \dot{\vec{u}}\,'$$

nach (3) ist $D^T \vec{v} = \vec{v}\,'$ und bekanntlich $D^T \dot{D}\, \vec{u}\,' = \vec{\omega}\,' \times \vec{u}\,'$, wobei $\vec{\omega}\,'$ <u>momentane Winkelgeschwindigkeit</u> der Rotation $D(t)$ (in körperfesten Komponenten), d. h.

$$(5) \qquad \boxed{\vec{v}\,' = \dot{\vec{u}}\,' + \vec{\omega}\,' \times \vec{u}\,'}$$

⌐ <u>geometrisch</u> (für $\vec{\omega}\,'$, $\underline{u}$ konstant):



$$\delta \vec{u}\,' = \underbrace{u_\perp\, \omega}_{|\vec{\omega}\,' \times \vec{u}\,'|}\, \delta t\, \vec{e}_e = \vec{\omega}\,' \times \vec{u}\,'\, \delta t$$

⌟

damit nun Bestimmung des <u>Gesamtdrehimpulses $\underline{L}$</u>:

Körper rotiere gemäß $B' = D(t)\, B$ um σ',

→ Masse m_i mit <u>körperfesten</u> (und damit <u>konstanten!</u>) Koordinaten $\vec{r}_i\,'$ besitzt nach (5) Geschwindigkeit

$$\vec{v}_i\,' = \vec{\omega}\,' \times \vec{r}_i\,'$$

und somit Drehimpuls

$$\vec{L}_i\,' = m_i\, \vec{r}_i\,' \times (\vec{\omega}\,' \times \vec{r}_i\,'),$$

$$\rightarrow \quad \vec{L}\,' = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i\,' = \sum_i m_i\, \vec{r}_i\,' \times (\vec{\omega}\,' \times \vec{r}_i\,')$$

$$= \sum_i m_i \left(|\vec{r}_i\,'|^2\, \vec{\omega}\,' - \vec{r}_i\,' \langle \vec{r}\,'_i, \vec{\omega}\,' \rangle \right)$$

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle - \vec{c} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

mit $\left(|\vec{r}|^2 \vec{\omega} - \vec{r} \langle \vec{r}, \vec{\omega} \rangle \right)_\mu = |\vec{r}|^2 \omega_\mu - x_\mu \sum_\nu x_\nu\, \omega_\nu$

$$= \sum_\nu \left(|\vec{r}|^2 \delta_{\mu\nu} - x_\mu x_\nu \right) \omega_\nu$$

erhalten wir

$$\boxed{\vec{L}' = I\,\vec{\omega}'}$$

mit Trägheitstensor (Trägheitsoperator) $I = (I_{\mu\nu})_{\mu\nu=1,2,3}$

$$\boxed{I_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(|\vec{r}_i'|^2 \delta_{\mu\nu} - x_{i\mu}' x_{i\nu}' \right)}$$

d.h. $$I = \sum_{i=1}^{N} m_i \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix}$$

$\left(\vec{r}_i' = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \right)$

im Kontinuumsbeschreibung $\left(\sum_i m_i \ldots \longrightarrow \int_V d^3\vec{r}'\, \rho(\vec{r}) \ldots \right)$:

$$I_{\mu\nu} = \int_V d^3\vec{r}'\, \rho(\vec{r}') \left(|\vec{r}'|^2 \delta_{\mu\nu} - x_\mu' x_\nu' \right).$$

Anmerkungen

1) beachte Analogie:

$$\vec{p} = M\,\vec{v}$$

Impuls — träge Masse — Geschwindigkeit

Drehimpuls — Trägheitstensor — Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{L}' = I\,\vec{\omega}'$$

2) Beziehung $\vec{L}' = I\,\vec{\omega}'$ kann auch auf raumfeste Größen transformiert werden:

$$D\vec{L}' = D\,I\,\underbrace{D^T D}_{1\!\!1}\,\vec{\omega}'$$

$\rightarrow \vec{L} = I_0\,\vec{\omega}$ mit $I_0 = D\,I\,D^T$, wg. Zeitabhängigkeit von D aber nicht zweckmäßig.

3) offensichtliche Symmetrie $(I = I^T)$ des Trägheitstensors gewährleistet Existenz eines körperfesten

Hauptachsensystems $B'_0 = (\underline{h}_1, \underline{h}_2, \underline{h}_3)$ bzg. dessen

I diagonal: $$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix},$$

I_1, I_2, I_3 sind Trägheitsmomente der Hauptachsen $\underline{h}_1, \underline{h}_2, \underline{h}_3$,

$\longrightarrow$ falls $\underline{\omega} \parallel \underline{h}_i$, dann $\vec{L}' \parallel \vec{\omega}'$, d.h. $\underline{L} \parallel \underline{\omega}$

Symmetrieachsen eines Körpers sind immer dessen Hauptachsen!

nun aber zum Teil (ii) des Plans:

Bewegungsgleichung für $\vec{\omega}'(t)$:

Drehimpulssatz $\dot{\underline{L}} = \underline{M}$ lautet nach (5) im körperfesten Koordinaten

$$\dot{\vec{L}}' + \vec{\omega}' \times \vec{L}' = \vec{M}'$$

mit $\vec{L}' = \mathrm{I}\,\vec{\omega}'$ also

$$\boxed{\mathrm{I}\,\dot{\vec{\omega}}' + \vec{\omega}' \times \mathrm{I}\,\vec{\omega}' = \vec{M}'}$$

DGL 1. Ord. für $\vec{\omega}'(t)$!

bzg Hauptachsensystem erhalten wir:

$$\boxed{\begin{aligned} I_1\,\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\,\omega_2\,\omega_3 &= M_1 \\ I_2\,\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\,\omega_1\,\omega_3 &= M_2 \\ I_3\,\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\,\omega_2\,\omega_1 &= M_3 \end{aligned}}$$

$\vec{\omega}' = (\omega_i)$
$\vec{M}' = (M_i)$

$\uparrow$

Euler-Gleichungen $\longrightarrow$ $\vec{\omega}'(t)$

freier Fall: $\vec{M}' = \vec{0}$, d.h. $\mathrm{I}\,\dot{\vec{\omega}}' = -\vec{\omega}' \times \mathrm{I}\,\vec{\omega}'$

stationäre Lösungen ($\vec{\omega}' = $ konst) erfordern somit $\vec{\omega}' \parallel I\,\vec{\omega}'$

$\rightarrow$ gleichförmige Rotationen um Hauptachsen ($\equiv$ Eigenvektoren von I) sind genau die stationären Bewegungen eines starren Körpers

Stabilität?

betrachte Rotation um $\underline{n}_1$ mit Winkelgeschw. Ω

+ kleine Störung: $\omega_1(0) = \Omega$, $\omega_2(0)$, $\omega_3(0) \neq 0$

aber $|\omega_2(0)|$, $|\omega_3(0)| \ll \Omega$

betrachte Euler-Gleichungen in linearer Ordnung von ω_2, ω_3:

$$I_1 \dot{\omega}_1 + \cancel{(I_3 - I_2)\,\omega_3\,\omega_2} = 0 \rightarrow \omega_1(t) = \Omega$$

$$\begin{cases} I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\,\Omega\,\omega_3 = 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\,\Omega\,\omega_2 = 0 \end{cases}$$

$$\ddot{\omega}_2 + \underbrace{\frac{1}{I_2 I_3}(I_1 - I_3)(I_1 - I_2)\,\Omega^2}_{=:\lambda}\omega_2 = 0$$

d.h. $\boxed{\ddot{\omega}_2 = -\lambda\,\omega}$

$\rightarrow$ Rotation um $\underline{n}_1$ stabil $\Longleftrightarrow$ $\lambda > 0$

$\Longleftrightarrow$ $(I_1 - I_3)(I_1 - I_2) > 0$

$\Longleftrightarrow$ I_1 maximales oder minimales Hauptträgheitsmoment!

m.a.W.: freie Rotation um Hauptachse mit mittlerem Moment ist instabil, Rotation um Hauptachse mit minimalem oder maximalem Moment ist stabil.