(freie Rotation des starren Körpers: Fortsetzung)

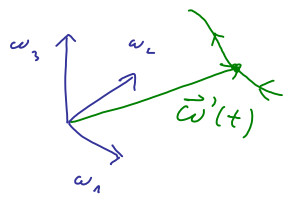
beachte: $\vec{\omega}'(t)$ als Lsg. der Eulergleichung

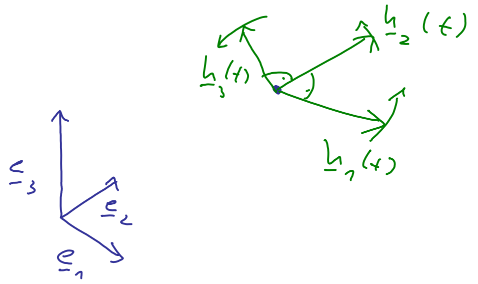
$\rightarrow$ $\underline{\omega}(t)$ im körperfesten Koordinaten

bzgl. Hauptachsensystem!

Bestimmung der Lage des rotierenden Körpers im Raum:

$$\vec{\omega}'(t) \xrightarrow{?} B_0'(t) = (\underline{h}_1(t), \underline{h}_2(t), \underline{h}_3(t)) = D(t)\,\mathbb{B}$$





aus $\underline{h}_i(t) = D(t)\,\underline{e}_i$ folgt $\dot{\underline{h}}_i = \dot{D}\,\underline{e}_i$

$$= D D^T \dot{D}\,\underline{e}_i$$

d.h. $\dot{\vec{h}}_i(t) = \underline{\underline{D}}(t)\,\vec{\omega}(t) \times \vec{e}_i$;

mit $\vec{\omega} = \underline{\underline{D}}\,\vec{\omega}'$ ergibt dies DGL zur Bestimmung von

$\underline{\underline{D}}(t) = (\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3)$.

<u>Drehimpulserhaltung</u> hilfreich: wähle $\underline{e}_3 \parallel \underline{L} = \text{konst.}$,

aus $L\underline{e}_3 = \sum L_i'(t)\,\underline{h}_i(t)$ folgt dann

$$\langle \underline{h}_j(t), \underline{e}_3 \rangle = \frac{L_j'(t)}{L} = \frac{I_j\,\omega_j'(t)}{L} .$$

<u>Kinetische Energie</u>

Körper rotiere um festen Pkt O' mit $\vec{\omega}'(t)$:

$$\rightarrow 2T = \sum_i m_i\,|\vec{v}_i|^2 = \sum_i m_i\,|\vec{v}_i'|^2$$

$$= \sum_i m_i \langle \vec{\omega}' \times \vec{r}_i', \vec{\omega}' \times \vec{r}_i' \rangle$$

$$= \sum_i m_i \langle \vec{\omega}', \vec{r}_i' \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}_i') \rangle = \langle \vec{\omega}', \underbrace{\sum m_i\,\vec{r}_i' \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}_i')}_{= \vec{L}' = I\,\vec{\omega}'} \rangle$$

$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b} \times \vec{c}, \vec{a} \rangle$

$= \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle$

d. h. $\boxed{T = \frac{1}{2} \langle \vec{\omega}', I \vec{\omega}' \rangle}$

⌈

kinetische Gesamtenergie von Translation und Rotation:

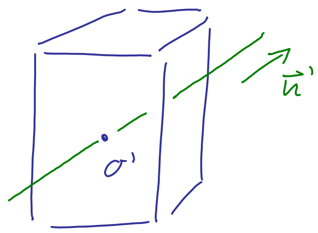
<u>Körperschwerpunkt</u> genüge $S = \sigma + \underline{R}(t)$;

Körper rotiere um S gemäß $\vec{\omega}'(t)$;

dann
$$T_{ges} = \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2}_{T_{trans}} + \underbrace{\frac{1}{2} \langle \vec{\omega}', I \omega' \rangle}_{T_{rot}} ;$$

leicht zu zeigen unter Beachtung von $\sum m_i \vec{r}_i' = \vec{0}$. ⌋

Trägheitsmoment bzgl. körperfester Achse durch σ', parallel $\vec{n}'$:



$$I_{\vec{n}'} := \langle \vec{n}', I \vec{n}' \rangle \qquad (0)$$

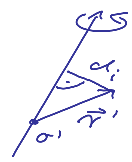
für Rotation um $\vec{n}'$ mit ω gilt

dann:
$$T = \frac{1}{2} I_{\vec{n}'} \omega^2 \qquad (1)$$

$$L_{\parallel} := \langle \underline{n}, \underline{L} \rangle = \langle \vec{n}', \vec{L}' \rangle = \frac{1}{2} I_{\vec{n}'} \omega \qquad (2)$$

aus (1) und $T = \frac{1}{2} \sum m_i |\vec{n}' \times \vec{r}_i'| \omega^2$ ergibt sich

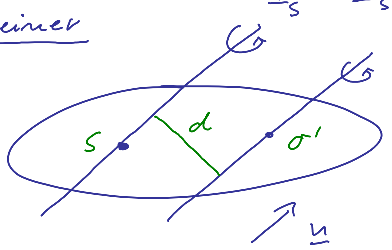
$$I_{\vec{n}'} = \sum_i m_i \underbrace{|\vec{n}' \times \vec{r}_i'|^2}_{= d_i^2}$$



bzw. $I_{\vec{n}'} = \int d^3\vec{r}' \, \rho(\vec{r}') |\vec{n}' \times \vec{r}'|^2$

(Berechnung mittels (0) aber i. d. R. einfacher)

<u>Satz von Steiner</u>



Starre Körper der Masse M, Rotation um Achse $\parallel \underline{n}$ durch σ' bzw S, Achsenabstand sei d;

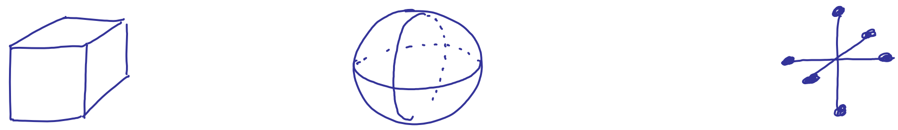
$$\boxed{I_{\sigma'} = I_S + M d^2}$$

Äquivalenz der Rotationsdynamik

Euler-Gleichungen $I \dot{\vec{\omega}}' + \vec{\omega}' \times I \vec{\omega}' = \vec{M}'$ bestimmt durch Trägheitstensor I, d.h. durch Hauptträgheitsmomente (HTM) I_1, I_2, I_3.

$\longrightarrow$ Körper mit identischen HTM besitzen dieselbe Dynamik der Rotation!

etwa: Würfel Kugel orthonorm. 3-Fach-Hantel



$$I = I_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

insbesondere: $I^{\text{Würfel}}_{\vec{u}'} \overset{!}{=} I_0$