Kanonische Transformationen

Def: Transformation $T: (q,p) \longmapsto (Q,P)$ kanonisch g.d.w. Hamilton-Fkt $K(Q,P,t)$ existiert so, dass transformierte Bahn $T(x(t)) = (Q(t), P(t))$ einer Phasenraumbahn $x(t) = (q(t), p(t))$ (gemäß $\dot{q}_i = \partial H / \partial p_i$, $\dot{p}_i = -\partial H / \partial q_i$) den transf. Hamiltonschen Gleichungen

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i}$$

genügt.

hilfreich für die weiteren Betrachtungen ist das

Hamiltonsche Prinzip für Phasenraumbahnen:

$X(t) = (q(t), p(t))$ genügt den Hamilt. Gleichungen

$\Longleftrightarrow$

$X(t)$ extremalisiert Wirkung

$$S_H[X] = \int_{t_0}^{t_1} \Big(\sum_i p_i(t)\, \dot{q}_i(t) - H(q(t), p(t)) \Big)\, dt$$

unter Randbedingungen $q(t_0) = q^0$, $q(t_1) = q^1$.

(Beweis genau wie der des Hamilt. Prinzips der Lagrangeschen Dynamik.)

Anhand des Hamilt. Prinzips erkennen wir, dass eine Transformation T kanonisch ist, wenn sie eine Bahn $x(t)$, die $S_H[x] = \int_{t_0}^{t_1} (\sum p_i \dot{q}_i - H(q,p))\, dt$ extremalisiert, auf eine Bahn $X(t) = T(x(t))$ abbildet, die

$$S_K[X] = \int_{t_0}^{t_1} \big(\sum P_i \dot{Q}_i - K(Q,P,t)\big)\, dt$$

extremalisiert; für geeignete Fkt $K(Q,P,t)$.

Dies ist der Fall, wenn für bel. Bahnen $(q(t), p(t))$

$$(*) \quad \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q,p) \overset{!}{=} \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(P,Q) + \frac{d}{dF} F(q,Q,t)$$

erfüllt ist. Hiebei ist $F(q,Q,t)$ eine <u>beliebige</u> diff.bare Fkt.; betrachten wir in (*) $q(t)$ und $Q(t)$ als unabhängige Fkten (die dann durch die Transformationsvorschrift $p(t)$ und $P(t)$ bestimmen), so folgt mit

$$\frac{d}{dt} F = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

eingesetzt in (*), dass

$$\boxed{\begin{aligned} &p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}(q,Q,t); \qquad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}(q,Q,t) \\ &K = H + \frac{\partial F}{\partial t} \end{aligned}}$$

damit ist die durch die Fkt $F(q,Q,t)$ erzeugte kanonische Transformation festgelegt.

Durch die Wahl andere unabhängiger Fkten (etwa (q,P), (Q,p), (p,P)) findet man analoge Beziehungen:

Zusammenfassend:

I	wähle $F = F(q,Q,t)$	$\longrightarrow$	$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}$, $P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}$
II	$= F(q,P,t)$	$\longrightarrow$	$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}$, $Q_i = \frac{\partial F}{\partial P_i}$
III	$= F(p,Q,t)$	$\longrightarrow$	$q_i = -\frac{\partial F}{\partial p_i}$, $P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}$
IV	$= F(p,P,t)$	$\longrightarrow$	$q_i = -\frac{\partial F}{\partial p_i}$, $Q_i = \frac{\partial F}{\partial P_i}$

in allen Fällen ist $K = H + \frac{\partial F}{\partial t}$

<u>Beispiele</u>

1) $F(q,Q) = \sum_j q_j Q_j \quad \longrightarrow \quad p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} = Q_i$

$$P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i} = -q_i$$

also $(q,p) \longmapsto (Q,P) = (p,-q)$

und $K(Q,P) = H(q(Q,P), p(Q,P)) = H(-P, Q)$

2) 1D harmonischer Oszillator: $H = p^2/2m + m\omega^2 q^2/2$

Erzeugende $F(q,Q) \overset{!}{=} \frac{1}{2} m \omega q^2 \operatorname{ctg} Q$ führt auf

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{\partial F}{\partial q} = m\omega q \operatorname{ctg} Q \\ P &= -\frac{\partial F}{\partial Q} = \frac{1}{2} m\omega q^2 / \sin^2 Q \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} p &= \sqrt{2m\omega P}\, \cos Q \\ q &= \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\, \sin Q \end{aligned} \qquad (*)$$

und $K(Q,P) = H(q(Q,P), p(Q,P)) = \omega P$!

$$\rightarrow \quad \dot{P} \overset{!}{=} -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \quad \rightarrow \quad P(t) = P_0$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega \quad \rightarrow \quad Q(t) = \omega t + \varphi_0$$

also nach (*) tatsächlich

$$p(t) = \sqrt{2m\omega P_0}\, \cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (E = \omega P_0 \geq 0)$$
$$q(t) = \sqrt{\frac{2P_0}{m\omega}}\, \sin(\omega t + \varphi_0) \qquad \checkmark$$

$\rightarrow$ Phasenraumbahnen im q-p- bzw Q-P-Diagrammen: